This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

UC-NRLF
$B 35 890

Digitized by Google

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
GIFT OF
MRS. THERESE F. COLIN
Class

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

PROBLÈMES

DE

MATHÉMATIQUES.

Digitized by Google

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

Digitized by Google

PROBLÈMES

DE

MATHÉMATIQUES

AVEC

LEURS SOLUTIONS DÉVELOPPÉES,

A L'USAGE

DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES
ET AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT,

PAR

A.-F. CHEVALLIER ET ACH. MÜNTZ.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY
OF
CALIFORNIA

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1872

Digitized by Google

GIFT OF
MRS. THERESE F. COLIN

Digitized by Google

PRÉFACE.

Un Recueil de problèmes de Mathématiques, conçu dans le même but que notre ouvrage intitulé : *Problèmes de Physique,* nous paraît devoir être accueilli favorablement par les candidats au baccalauréat ès sciences et aux Écoles du Gouvernement. C'est à eux qu'il est spécialement destiné; nous n'avons rien négligé pour le rendre d'une utilité pratique qui fait le mérite d'un ouvrage de cette nature. Il est le plus complet de tous les Recueils qui ont été publiés jusqu'à ce jour, et contient des exemples de toutes les questions qui sont posées aux examens du baccalauréat ès sciences, et d'admission à l'École de Saint-Cyr, à l'École navale, etc.

On y trouvera les solutions développées avec soin des problèmes d'Arithmétique, de Géométrie théorique et pratique, d'Algèbre et de Trigonométrie rectiligne, qui peuvent servir de type à tous les problèmes qu'on peut poser dans ces différentes branches des Mathématiques.

Là encore, notre soin ne s'est pas borné au choix des questions; nous avons toujours attaché une grande importance à leur développement, et indiqué avec détail la marche à suivre pour arriver à la solution, afin aussi d'initier nos lecteurs aux raisonnements et à toutes les transformations nécessaires à la pratique des calculs de ce genre.

La première Partie contient les principales questions d'Arith-

179629

Digitized by Google

métique susceptibles de faire l'objet de compositions. La deuxième traite de la Géométrie ; nous avons donné les solutions des principaux problèmes qu'on peut se proposer de résoudre, soit sur la Géométrie pure, soit sur la Géométrie pratique. La troisième Partie comprend l'Algèbre ; nous avons donné dans cette section un grand nombre de questions qui se rapportent à la résolution des équations du premier et du second degré, et beaucoup d'exemples numériques sont contenus dans ce Chapitre. Enfin, nous terminons par la Trigonométrie rectiligne, pour laquelle nous avons donné un nombre considérable de questions se rapportant à la résolution des triangles et au levé des plans.

Nous ne doutons pas que le lecteur ne trouve dans le Recueil que nous publions une utilité réelle, grâce à l'esprit pratique qui a présidé à la rédaction de ce Livre.

A.-F. Chevallier, Ach. Müntz.

Digitized by Google

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

TABLE DES MATIÈRES.

ARITHMÉTIQUE.

Règle de trois 1
Règle de trois simple et directe 1
Règle de trois simple et inverse 3
Règle de trois composée 5
Règle d'alliage 8
Questions diverses 9
Des progressions. — Progressions par différence 12
Progressions par quotient 20
Questions relatives au troc 28
Règle de société ou de partage 32
Questions relatives à la règle de société simple 36
Règle de société composée 38
Intérêts simples et composés 42
Annuités 48
Calculs par logarithmes 57

GÉOMÉTRIE.

Problèmes divers 72
De la comparaison des volumes 94
Problèmes divers sur l'évaluation des longueurs, surfaces et volumes. 127

ALGÈBRE.

Résolution des équations du 1er degré à une seule inconnue 165
Problèmes du 1er degré à une seule inconnue 168
Résolution des équations du 1er degré à plusieurs inconnues 171
Problèmes du 1er degré à plusieurs inconnues 182
Résolution des équations du 2e degré à une seule inconnue 193
Résolution des équations du 2e degré à plusieurs inconnues 199
Questions sur les maxima et les minima dont la solution dépend de la résolution des équations du 2e degré 219
Questions diverses 233

Digitized by Google

TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

Transformations qui sont d'un usage fréquent..... 277
Résolution des équations trigonométriques..... 291
Résolution des triangles rectilignes..... 303
Problèmes divers..... 322
Application de la Trigonométrie rectiligne au levé des plans..... 357
Mesurer la hauteur d'un objet vertical dont le pied est accessible.. 357
Mesurer la distance qui sépare un point accessible D, d'un autre point B non accessible..... 359
Trouver la hauteur du soleil sur l'horizon..... 360
Connaissant la hauteur d'un objet, déterminer la distance de laquelle on peut l'apercevoir..... 361
Réduire un angle à l'horizon..... 363
Mesurer la distance qui sépare deux points inaccessibles..... 365
Retrouver sur le terrain un point C dont on connaît les distances a et b à deux points connus A et B..... 368
Trois points A, B, C sont donnés sur la carte d'un pays, on propose de déterminer la position d'un quatrième point M d'où on aurait mesuré les angles AMB, AMC; les quatre points A, B, C, M étant supposés dans le même plan..... 370
Connaissant la latitude d'un lieu, ainsi que la déclinaison du soleil, connaissant aussi la longueur d'un corps perpendiculaire à l'horizon, on propose de calculer la longueur de l'ombre méridienne de ce corps..... 373
Trouver la hauteur d'une montagne..... 377
Trouver la distance d'un point donné à la droite qui passe par deux points inaccessibles..... 379
On donne, dans le quadrilatère ABCD : $AB = \alpha = 2724^m,67$; $A = 54°18'13''$; $\alpha = 41°23'48''$; $B = 83°15'24''$; $\beta = 37°23'55''$; on propose de calculer les côtés AD, DC et CB du quadrilatère; les diagonales AC et BD, les segments AO, BO, DO et CO, les trois angles en D, l'angle des diagonales, et enfin la surface du quadrilatère..... 381

Digitized by Google

Problèmes de Mathématiques.

Arithmétique.

Règle de trois.

La Règle de trois est une opération par laquelle on détermine une quantité dont on connaît le rapport avec une quantité connue.

Quel est le diamètre de la lune, sachant qu'il est à celui de la terre comme 27 est à 100 et que la longueur de ce dernier est de 2865 lieues?

Représentons par x le diamètre de la lune, nous aurons d'après l'énoncé :

$$x : 2865 :: 27 : 100$$

d'où on tire :

$$x = \frac{2865 \times 27}{100} = 773 \text{ lieues, environ.}$$

Règle de trois simple et directe

Dans la règle de trois directe, les quantités relatives sont dites en raison directe des principales ou directement proportionnelles à leurs principales (1)

(1) Les quantités principales sont les quantités deux à deux de même espèce connues dans la question. Les quantités relatives

Digitized by Google

La règle de trois directe est fondée sur ce que les effets sont dans le même rapport que leurs causes et réciproquement.

Problème 2.

Si pour 216 f on a fait transporter 4000 K, combien de Kilog. fera t'on conduire pour 342 f ? (toutes choses égales d'ailleurs, c'est à dire mêmes marchandises, distances égales, chemin de la même difficulté etc.)

Ce problème très simple, se résout en écrivant la proportion :

$$x : 4000 :: 342 : 216$$

en simplifiant le second rapport, on a :

$$x : 4000 :: 19 : 12.$$

divisant par le même nombre 4, les deux conséquents de cette dernière proportion, elle deviendra :

$$x : 1000 : 19 : 3.$$

d'où, on tire :

$$x = \frac{1000 \times 19}{3} = \frac{19000}{3} = 6333^{K}33$$

Problème 3.

En supposant qu'une troupe d'ouvriers fasse 550 m d'un certain ouvrage, dans un temps quelconque, on demande combien une seconde troupe, d'un nombre égal d'ouvriers, ferait de mètres du même ouvrage, dans le même temps, si la force des premiers ouvriers était à celle des seconds dans le rapport de 16 à 11 ?

Il est évident que la seconde troupe d'ouvriers ferait 2 fois, 3 fois, etc. moins d'ouvrage que la première, si la force des ouvriers qui la composent était 2 fois, 3 fois, etc, moindre que celle des ouvriers dont la première troupe est formée. En général, le rapport

---

sont deux quantités aussi de même espèce, mais dont l'une seulement est donnée dans la question, tandis que l'autre est à déterminer.

Digitized by Google

des quantités d'ouvrage sera égal à celui des forces des ouvriers. Il suffira donc pour résoudre la question d'écrire la proportion suivante :

$$x : 520 :: 11 : 6$$

d'où :

$$x = \frac{520 \times 11}{6} = 357^{m}5.$$

Problème 4

On a payé 400 F pour un certain nombre d'aunes d'une étoffe qui a $\frac{2}{3}$ de large ; combien payerait-on pour un nombre égal d'aunes de la même étoffe, si sa largeur était de $\frac{5}{4}$?

Il est clair qu'on payera d'autant plus que $\frac{5}{4}$ est plus grand à l'égard de $\frac{2}{3}$; donc pour résoudre le problème il suffira d'écrire la proportion suivante :

$$x : 400 :: \frac{5}{4} : \frac{2}{3}.$$

ou bien en chassant les dénominateurs

$$x : 400 :: 15 : 8$$

divisant enfin les conséquents par 8 il vient :

$$x : 50 :: 15 : 1$$

d'où on tire :

$$x = 750^{f}.$$

Règle de trois simple et inverse.

Dans la règle de trois inverse les quantités relatives sont dites en raison inverse du principale ou réciproquement proportionnelles à leurs principales.

Problème 5.

En supposant qu'on fasse conduire 7000 Kilog de marchandises à 38 myr. moyennant un prix convenu, on demande combien de kilogs de la même marchandise on ferait conduire à 5 myr. pour le même prix.

S'il fallait effectuer le transport à une distance 2 fois, 3 fois etc, plus considérable, il est évident que, pour le même prix, on ne pourrait faire conduire que 2 fois,

Digitized by Google

3 fois etc moins de marchandises.

En général, le prix du transport se détermine d'après la quantité de la charge et la distance à laquelle il faut la conduire. Il faut donc que x kilog poids cherché, soit d'autant plus petit à l'égard de 7000 k que 57 myr. distance à laquelle il faut conduire à kil. est au contraire plus grand à l'égard de 38 myr. distance à laquelle le transport de 7000 k doit avoir lieu. Il faut donc que x kil. soit à 7000 k dans le rapport selon lequel 38 myr. espace que doit parcourir ce dernier poids, est à 57 myr., chemin que devront faire les x kilog. Donc les quantités relatives x kil. et 7000 kil. suivent le rapport inverse de leurs principales 57 myr. et 38 myr. On aura donc la proportion :

$$x : 7000 :: 38 : 57$$

d'où on tire :

$$x = \frac{7000 \times 38}{57} = 4666^{k}\cdot 66$$

Problème 6.

Si la dureté du terrain est à celle d'un autre dans le rapport de 13 à 8, et qu'on creuse dans le premier un canal de 728 mc; on demande quel sera le volume du canal qu'on creusera dans le second terrain, en faisant usage des mêmes forces & de temps égaux ?

Il est évident que toutes les choses égales d'ailleurs, on enlèverait 2 fois, 3 fois &c, plus de terre dans un terrain qui aurait 2 fois, 3 fois &c, moins de dureté. Donc x mc. enlevés dans le second terrain, dont la dureté est exprimée par 3, doivent être à l'égard de 728 mc. extraites du premier terrain dont 13 représente la dureté, dans le rapport de 13 à 8. La proportion à établir est donc la suivante :

$$x^{mc} . 728^{mc} :: 13 : 8$$

Digitized by Google

ou bien :

$$x^{mc} : 91^{mc} :: 13 : 1$$

d'où

$$x = 91 \times 13 = 1183^{m.c}$$

Problème 7.

On suppose qu'on creuse deux canaux d'une largeur égale, mais dont le premier a 200m de long sur 3 de profondeur, et le second doit avoir une profondeur de 5m, on demande quelle sera la longueur du second canal, creusé dans un terrain de même nature que le premier, et par le concours des mêmes circonstances.

Puisque le second canal doit résulter des mêmes forces correspond dans des temps égaux, il est clair que sa longueur sera d'autant plus petite à l'égard de celle du premier, qu'il doit avoir plus de profondeur que celui-ci.

La proportion sera donc :

$$x : 200 :: 3 : 5$$

ou $x : 40 :: 3 : 5$

d'où on tira :

$x = 40 \times 3 = 120^m$. qui sera la longueur du second canal.

Règle de trois composée.

La règle de trois est composée quand le rapport des quantités relatives dépend de plusieurs rapports qu'il faut composer en un seul, pour ramener la question à une règle de trois.

Problème 8.

Supposons que pour 63f., on fasse conduire 3150k à 45 lieues ; combien de kilog. faudra-t-on transporter à

Digitized by Google

15 lieues pour 90^{f}, si la difficulté de chemin était à celle du second dans le rapport de 4 à 9 ?

Désignons par x^{Kilog} le nombre cherché, il est évident qu'il sera d'autant plus grand à l'égard de 3150 ^{Kilog}, que 90^{f} est plus grand que 63^{f}; on aura donc la proportion :

$$x^{K} : 3150^{Kilog} :: 90 : 63 \text{ ou } :: 10 : 7$$

Cette même charge x^{K} sera d'autant plus forte qu'elle devra être transportée à une moindre distance, donc on aura :

$$x^{K} : 3150^{K} :: 45 : 15 \text{ ou } :: 3 : 1 .$$

Enfin d'après la troisième condition du problème, le nombre cherché de Kilog. sera de 3150^{K}, en raison inverse des difficultés respectives que présentent les routes par lesquelles les transports doivent s'effectuer, on aura:

$$x^{Kil} : 3150^{K} :: 4 : 9$$

On a donc à la fois :

$$x^{Kil} : 3150 \begin{cases} 10 : 7 \\ 3 : 1 \\ 4 : 9 \end{cases}$$

ou bien :

$$x : 3150 :: 10 \times 3 \times 4 : 7 \times 1 \times 9$$

ou $$x : 3150 :: 120 : 63$$

d'où on tire :

$$x = \frac{3150 \times 120}{63} = 6000^{Kilog}$$

Problème 9

On suppose que 140 ouvriers ayant 9 degrés de force ont travaillé 7 $\frac{1}{2}$ par jour, pendant 546 j, dans un terrain de 7 degrés de dureté, pour construire une digue de 216 toises de longueur, sur 1 toise 4 pieds de hauteur et 3 toises 2 pieds de largeur. Quelle sera la longueur d'une digue construite par 192 ouvriers, ayant

Digitized by Google

11 degrés de force, travaillant dans un terrain de 11 degrés de dureté, 8h et $\frac{1}{3}$ par jour pendant 975j en supposant que la hauteur de cette digue soit de 2 toises 3 pieds et la largeur de 4 toises 5 pieds ?

Il est évident que x toises longueur de la seconde digue, sera à l'égard de 216 toises longueur de la première, en raison directe des nombres d'ouvriers de leurs forces respectives, des nombres de jours employés au travail et de sa durée journalière. On conçoit, au contraire, que le rapport des longueurs des digues dont il s'agit, sera en raison inverse de leurs autres dimensions respectives et de la dureté des terrains sur lesquels on les construit. Donc le rapport de x toises à 216 toises dépendra de quatre rapports directs et de trois rapports inverses, on aura alors :

$$x^{\text{toises}} : 216^{\text{toises}} \quad \left\{\begin{array}{c} 192 : 140 \\ 11 : 9 \\ 8\frac{1}{3} : 7\frac{1}{2} \\ 975 : 546 \\ 7 : 11 \\ 1^{t}4^{p} : 2^{t}3^{p} \end{array}\right\} \text{ ou } :: \left\{\begin{array}{c} 48 : 35 \\ 11 : 9 \\ 10 : 9 \\ 25 : 24 \\ 7 : 11 \\ 2 : 3 \end{array}\right\} \text{ ou } :: \left\{\begin{array}{c} 16 \times 3 : 7 \times 5 \\ 11 : 9 \\ 10 : 9 \\ 5 \times 5 : 7 \times 2 \\ 7 : 11 \\ 2 : 3 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{|c|} 3^{t}2^{p} : 4^{t}1^{p} \\ \hline 4 : 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{|c|} \\ \hline 4 : 5 \\ \hline \end{array}$$

Effaçant les nombres 3, 11, 5, 5, 7 et 2 communs à la colonne des antécédents et à celle des conséquents multipliant entre eux les nombres qui restent dans chacune d'elles, la proportion deviendra :

$$x^{t} : 2^{t}6^{t} :: 16 \times 10 \times 4 : 9 \times 9 \times 7$$

décomposant le premier conséquent 216, en $8 \times 9 \times 3$ et l'un des facteurs 9 du second conséquent, en 3×3 on aura :

$$x : 8 \times 9 \times 3 :: 640 : 9 \times 3 \times 3 \times 7$$

Supprimant les facteurs 9 et 3, communs aux deux conséquents de cette nouvelle proportion, elle se réduira à :

$$x : 8 :: 640 : 21.$$

Digitized by Google

d'où on tire

$$x = \frac{8 \times 640}{21} = 243 \text{ toises } 81 \text{ à moins d'un centième}$$

de toise.

Règle d'Alliage

L'alliage est l'assemblage de différents métaux ; le mélange est celui de divers grains ou liqueurs. La règle d'alliage sert : 1° à déterminer la valeur moyenne de plusieurs unités de même espèce, quand on connaît la valeur particulière de chacune d'elles ; 2° à prendre un terme moyen entre des résultats différents donnés, sur un même objet, par l'expérience ou l'observation.

Problème 10

On a mêlé ensemble 300 bouteilles de vin à $0^f,70$, 200 à 1^f et 150 à $1^f,30$; on demande à quel prix revient une bouteille de mélange ?

300^b	à $0^f,70$	.....	210^f
200^b	à 1^f	.....	200^f
150^b	à $1^f,30$	.....	195^f
Total des unités 650^b		Valeur totale du mélange	605^f

Donc le prix d'une bouteille de mélange vaudra $= \frac{605}{650} = 0^f,93^c$.

Problème 11.

Pour essayer une pièce d'artillerie, on a tiré avec elle 100 coups dont 18 ont porté à 632^m ; 25 à 628^m ; 53 à 620^m et 4 à 640^m ; On demande quelle est la portée moyenne de cette pièce ?

D'après l'énoncé, on aura évidemment :

18	coups ont porté à 632^m	.....	11376^m
25	..... à 628^m	.....	15700^m
53	..... à 620^m	.....	32860^m
Nombre 4	..... à 640^m	.....	2560^m
de coups tirés : 100		Somme des portées :	62496^m

Google

On voit que les portées des 100 coups d'essai formant une somme de 62496m; la portée moyenne de cette pièce sera estimée être la 100e portée de 62496m ou 624m.96 pour la portée moyenne.

Questions diverses.

Problème 12

Quelle est la fraction génératrice de la série 0.472472... considérée comme une progression géométrique décroissante ?

La somme des termes d'une progression géométrique est donnée par la formule :

$$S = \frac{w - a}{q - 1} = \frac{a}{1-q} - \frac{wq}{1-q}$$

Lorsque la progression est décroissante, cette formule a pour limite $\frac{a}{1-q}$, le terme $\frac{wq}{1-q}$ tendant évidemment vers zéro; puisque le terme w de la progression tend aussi vers zéro. En appliquant cette formule à la série :

$$0.472472 \ldots\ldots\ldots$$

qui se compose des termes suivants d'une progression décroissante :

$$\frac{472}{1000}, \frac{472}{1000^2}, \frac{472}{1000^3} \ldots\ldots\ldots\ldots \text{etc.}$$

On obtiendra pour la valeur de la fraction génératrice cherchée :

$$\frac{\frac{472}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} \quad \frac{472}{1000-1} \quad \frac{472}{999}$$

Problème 13

On a deux lingots d'argent aux titres de 0.775 et 0.940; quel poids doit on prendre de chacun d'eux pour former 25 gr. d'alliage au titre de 0.900?

Désignons par x le nombre de grammes que l'on

Digitized by Google

doit prendre pour le premier lingot et par suite $25-x$ ce que l'on prendra dans le second. Le poids de l'argent contenu dans x grammes du premier lingot est égal à :

$$x^{gr.} \times 0,775$$

La quantité d'argent contenue dans $25-x$ grammes du second lingot est égal à :

$$(25-x)^{gr.} \times 940.$$

La totalité d'argent contenue dans l'alliage est donc :

$$x \times 0.775 + (25-x)\,0.940$$

Puisque le titre de l'alliage est 0.900 la quantité d'argent contenue dans les 25 grammes est égale à :

$$25^{gr.} \times 0.900$$

D'après l'énoncé du problème, on doit avoir l'égalité suivante :

$$x \times 0.775 + (25-x)\,0.940 = 25 \times 0.900$$

équation du premier degré d'où on déduit facilement : $x = 6^{gr}.0606$

On devra donc prendre :

Du 1er lingot $6^{gr}.0606$.

Du 2ème lingot $18^{gr}.3934$.

Problème 14.

Deux frères ont 20 actions dans une entreprise. L'un possède 11 de ces actions partagées entre 16 personnes, l'autre en a 9 pour 13 coassociés. Deux actions se vendent au même prix. Quelle est la part la plus avantageuse à acheter ?

L'action de la première part étant partagée entre 16 personnes ne représente évidemment que $\frac{1}{16}$ d'action ; les 11 actions valent $\frac{11}{16}$ d'action.

Celles de la seconde part représentent $\frac{1}{13}$, et par conséquent les 9 actions valent $\frac{9}{13}$.

Si donc nous réduisons les deux fractions :

$$\frac{11}{16} \quad \text{et} \quad \frac{9}{13}$$

au même dénominateur, il viendra :

Digitized by Google

$$\frac{143}{208} \text{ et } \frac{144}{208}$$

C'est à dire que la première part est représentée par la fraction : $\frac{143}{208}$
et la deuxième part pour la fraction : $\frac{144}{208}$

La deuxième part est donc plus avantageuse que la première de : $\frac{1}{208}$ d'action.

Progressions par Différence

Problème 15

Combien faut-il prendre de termes dans une progression par différence dont le premier terme est 2,5 et dont la raison est 0,3 pour que la somme de ces termes soit égale à 1020 ?

On sait que la formule qui donne la somme S de n termes d'une progression arithmétique en fonction du premier terme a et de la raison r, est :

$$S = \frac{\{2a + r(n-1)\}n}{2}$$

de laquelle on tire :

$$n = \frac{-(2a-r) \pm \sqrt{(2a-r)^2 + 8rS}}{2r}$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs et effectuant, on trouve

$$n = 75$$

La solution négative doit évidemment être rejetée.

Problème 16

Dans une progression par différence on a le premier terme $a = 3$ le dernier terme $l = 37$ et la raison $r = 4$. On demande de déterminer le nombre de termes n et la somme S.

Digitized by Google

de ces termes ?

De la relation connue : $l = a + (n-1)r$, on tire facilement :

$$n = 1 + \frac{l-a}{r}$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs, on a :

$$n = 1 + \frac{27-3}{4} = 1 + \frac{24}{4} = 1 + 6 = 7$$

Ainsi donc le nombre n^{a} de termes est 7.

Pour avoir maintenant la somme S des termes en fonction de a, l, n, il faudra employer la formule :

$$S = \frac{(a+l)n}{2}$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs, on a :

$$S = \frac{(3+27)\,7}{2} = \frac{210}{2} = 105.$$

Problème 17.

Dans une progression par différence on donne $a = 3$, $l = 27$, $n = 7$. On demande de calculer la raison r et la somme S des termes ?

Pour trouver la somme S, faisons usage comme dans le problème précédent de la formule :

$$S = \frac{(a+l)\,n}{2}$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs, on aura :

$$S = \frac{(3+27)\,7}{2} = \frac{210}{2} = 105$$

Pour trouver la raison r, nous employons la formule connue :

$$l = a + (n-1)\,r$$

De laquelle on tire :

$$r = \frac{l-a}{n-1}$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs, il vient :

$$r = \frac{27-3}{6} = \frac{24}{6} = 4$$

Problème 18.

Étant donné dans une progression par différence les termes

Digitized by Google

a, l, S. Trouver les formules qui donnent r et n ?

De la formule : $S = \frac{(a+l)\,n}{2}$ on tire immédiatement :

$$n = \frac{2S}{a+l}$$

Connaissant n, il sera facile de déterminer la raison r en se servant de la relation :

$$l = a + (n-1)\,r$$

de laquelle on tire :

$$r = \frac{l-a}{n-1}$$

Problème 19.

Étant donnés dans une progression par différence les termes a, r, n trouver le dernier l et la somme S ?

Le dernier terme l est donné par l'égalité :

$$l = a + (n-1)\,r$$

Substituant cette valeur dans la formule :

$$S = \frac{(a+l)\,n}{2}$$

elle deviendra :

$$S = \frac{\{2a + (n-1)\,r\}\,n}{2}$$

formule qui donne la somme S des termes en fonction du premier terme a et de la raison r.

Problème 20.

Dans une progression par différence on donne $a = 3$, $n = 7$ et $S = 105$. On demande de déterminer le dernier terme l et la raison r.

Déterminons d'abord la raison r. Prenant pour cela la formule en fonction du terme a et de la raison r, d'après le problème précédent on a :

$$S = \frac{\{2a + (n-1)\,n\}}{2}$$

Digitized by Google

d'où on tire :

$$2S = 2an + rn^2 - rn$$
$$2S = 2an + (n^2 - n)r$$

d'où enfin :

$$r = \frac{2S - 2an}{n^2 - n}$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs, il vient :

$$r = \frac{210 - 42}{49 - 7} = \frac{168}{42} = 4.$$

Maintenant que nous connaissons r pour déterminer l nous avons :

$$l = a + (n - 1)r$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs, on aura :

$$l = 3 + 6 \cdot 4 = 3 + 24 = 27.$$

Problème 21.

Etant donnés dans une progression arithmétique l, r, n, trouver a, S ?

De la formule : $l = a + (n - 1)r$

On tire : $a = l - (n - 1)r$

Connaissant a, pour trouver la valeur S, nous ferons usage de la formule connue :

$$S = \frac{(a + l)n}{2}$$

Problème 22.

Etant donnés dans une progression par différence l, n, S. Trouver a, r ?

De la formule connue : $S = \frac{(a + l)n}{2}$ on tire successivement :

$$2S = na + nl$$
$$2S - nl = na$$

d'où enfin :

Digitized by Google

$$a = \frac{2S - nl}{n}$$

Connaissant a, de la formule : $l = a + (n-1)r$ on tire :

$$r = \frac{l - a}{n-1}$$

Problème 23

Connaissant dans une progression par différence r, n, S. Trouver a, l ?

Prenons la formule qui donne la somme S des termes en fonction de a et de la raison r ;

$$S = \frac{2a + (n-1)r}{2} n$$

ou :

$$2S = 2an + rn^2 - rn$$

$$2S - rn^2 + rn = 2an$$

d'où :

$$a = \frac{2S - rn^2 + rn}{2n}$$

Connaissant a il est facile de connaître l au moyen de la formule :

$$l = a + (n-1)r$$

Problème 24.

Insérer 9 moyennes arithmétiques entre 4 et 11. ?

La raison de la progression est donnée par la formule :

$$r = \frac{l-a}{n+1} = \frac{11-4}{10} = 0,7 \ ;$$

donc la progression sera :

4. 4,7. 5,4. 6,1. 6,8. 7,5. 8,2. 8,9. 9,6. 10,3. 11.

Problème 25

Trouver le dix-septième terme d'une progression par différence dont le premier est 2 et la raison 3 et la somme des 17 termes.

Si nous désignons par l le dix-septième que nous

Digitized by Google

cherchons, nous aurons évidemment la formule :

$$l = a + (n-1)\,r$$

a désignant, n le nombre de termes et r la raison de la progression : Remplaçant les lettres par leurs valeurs, il vient :

$$l = 2 + (17-1)\,3 = 2 + 16 \times 3 = 2 + 48 = 50$$

La somme S en fonction du premier terme a, du dernier l et du nombre n de termes est :

$$S = \frac{(a+l)\,n}{2} \quad \text{ou bien : } S = \frac{(2+50)\,17}{2} = 26 \times 17 = 442.$$

Problème 26

Insérer des moyens différentiels entre deux nombres donnés, c'est trouver des nombres qui forment une progression par différence dont les deux nombres donnés soient les deux extrêmes.

Or, on sait que le plus grand des deux nombres donnés est égal au plus petit augmenté d'autant de fois la raison qu'il a de moyens à insérer plus un : car c'est là le nombre de termes qui précèdent le plus grand des deux nombres. Donc, si du plus grand nombre on retranche le plus petit, le reste sera égal à la raison multipliée par le nombre des moyens à insérer plus un ; donc :

Pour obtenir la raison de la progression demandée, il suffit de diviser la différence des deux nombres donnés par le nombre des moyens à insérer plus un.

Problème 27.

Insérer six moyens différentiels entre 2 et 23.

Retranchons le plus petit des deux nombres donnés du plus grand

$$23 - 2 = 21$$

on obtient 21 pour reste ; divisant ce reste par le nombre des moyens à insérer plus un, c'est-à-dire par 7 ; le quotient 3 exprime

Digitized by Google

la raison de la progression, on aura alors :

$$\div\ 2.5.8.11.14.17.20.23.$$

Problème 28.

Insérer huit moyens différentiels entre 1 et 19.

Retranchons le plus petit nombre du plus grand on aura :

$$19 - 1 = 18$$

par suite la raison de la progression est :

$$\frac{18}{9} = 2$$

on conclut :

$$\div\ 1.3.5.7.9.11.13.15.17.19.$$

Progressions par Quotients

Problème 29.

Quelle est la somme des 12 premiers termes de la progression 3, 6, 12 ?

La formule qui donne la somme des termes d'une progression par quotients est :

$$S = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Dans laquelle a est le premier terme de la progression et q la raison, il viendra donc en faisant dans la formule ci-dessus : $a = 3$, $q = 2$, $n = 12$:

$$S = a\,\frac{q^n - 1}{q - 1} = 3\,(4096 - 1) = 12285$$

le nombre 4096 écrit dans la parenthèse est la valeur de :

$$2^{12}$$

La somme cherchée est donc : 12285.

Digitized by Google

Problème 30.

Quelle est la somme des 12 premiers termes de la progression : $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$ .....?

La formule : $S = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$ donne

en y faisant :

$$a = 3 \ , \ q = \frac{1}{2} \ , \ n = 12$$

$$S = 3\frac{\frac{1}{4096} - 1}{\frac{1}{2} \ 1} = 3\frac{1 - \frac{1}{4096}}{1 - \frac{1}{2}} = 3\frac{4095}{2048}$$

ou bien :

$$S = \frac{12285}{2048} = 6 - \frac{3}{2048}$$

Problème 31.

Trouver le produit des sept premiers termes de la progression géométrique dont le premier terme est 5 et la raison 2 ?

En nommant a, b, c ..... h, K, l les termes successifs d'une progression géométrique :

$$\div\div \ a : b : c \ ..... : h : K : l$$

r la raison de la progression, n le nombre de ses termes, P le produit des termes, On demontre, dans le traité, les formules suivantes :

$$l = a \times r^{n-1}, \ P = \sqrt{(a \times l)^n}$$

En remplaçant dans cette dernière expression l par la valeur donnée par la première formule, on obtient :

$$P = \sqrt{(a^2 + r^{n-1})^n} = \sqrt{a^{2n} r^{n(n-1)}} = a^n \times r^{n\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs on a :

$$P = 5^7 \times 2^{21} = 163840000000.$$

Problème 32.

Quelle est la somme des termes de la progression

Digitized by Google

géométrique !

$$\div\div\ 5 : 15 : 45 : 135 : 405 : 1215 : 3645 .$$

On sait que pour obtenir la somme des termes d'une progression géométrique, il faut multiplier le dernier terme par la raison; en retrancher le premier terme, et diviser le reste par la raison diminuée d'une unité. Cette règle s'exprime au moyen de la formule :

$$S = \frac{ql - a}{q-1}$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs, on aura :

$$S = \frac{3645.3 - 5}{3-1} = 5465.$$

telle est la valeur de la somme des termes de la progression.

Remarque. — Si l'on met pour l sa valeur aq^{n-1} la formule précédente qui donne S devient :

$$S = \frac{aq^n - a}{q-1} = \frac{a(q^n - 1)}{q-1}$$

On peut établir cette formule directement car on a :

$$S = a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1}$$
$$S = a(1 + q + q^2 + q^3 + \dots\dots\dots q^{n-1})$$
$$S = a(q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q^2 + q + 1)$$

Or la quantité entre parenthèses est le quotient de $q^n - 1$ par $q-1$; on pourra donc écrire :

$$S = a\,\frac{q^n - 1}{q-1}$$

Problème 33

Un joueur double sa mise chaque fois qu'il perd. Si sa mise primitive était de 0f 25c et qu'il perdit 20 fois de suite, quelle serait sa perte totale ?

Il est clair que les pertes successives du joueur forment une progression géométrique dont le premier terme est 0f 25 et dont la raison est 2. On cherchera d'abord du 20e terme. Or, on sait que le dernier terme est donné par l'expression :

Digitized by Google

$$l = a\,q^{n-1}$$

c'est à-dire en remplaçant les lettres par leurs valeurs :

$$l = 0.25 \times 2^{19} = 131072^{f}.0$$

On aura la somme totale des pertes au moyen de la formule :

$$S = \frac{131,072 \times 2 - 0^{f}.25}{2-1} = 262.143^{f}.75.$$

Problème 34.

Un maréchal interrogé sur le prix d'un cheval répond : les fers de mon cheval sont fixés à l'aide de 20 clous : si vous me donniez $0^{f}.01^{c}$ pour le premier, $0^{f}.02^{c}$ pour le second, $0^{f}.04^{c}$ pour le troisième, et ainsi de suite, toujours en doublant je vous donnerais le cheval et $485^{f}.75$. On demande combien il l'estimait ?

Nous allons chercher le nombre de centimes qu'il faut donner pour le vingtième clou. Ce nombre est évidemment le vingtième terme d'une progression géométrique dont le premier terme est l'unité et dont la raison est 2, on aura donc en désignant par l ce vingtième terme que nous cherchons :

$$l = 1.2^{19} = 524288^{c}$$

Le nombre total S de centimes payés payés pour les 20 clous sera donné par la formule :

$$S = \frac{524.288 \times 2 - 1}{2-1} = 1048575$$

ou bien :

$$S = 10485^{f}.75$$

Si de ce nombre nous retranchons : $485^{f}.75$, nous obtiendrons pour reste :

$$10,000^{f}.\,''$$

nombre qui répond à la question.

Problème 35.

Quelle est la limite des termes de la progression

Digitized by Google

géométrique : :: $1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4}$: etc. — ?

On sait que la limite de la somme des termes d'une progression géométrique décroissante est égale au premier terme divisé par l'unité moins la raison. On a donc en remplaçant les lettres par leurs valeurs dans la formule connue :

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2-1} = 2 \quad \text{donc } S = 2$$

Problème 36.

On propose d'insérer 7 moyens géométriques entre 7 et 1792 ?

Il faut évidemment chercher la raison de la progression géométrique et la question sera résolue. En appelant A et B les deux nombres entre lesquels il faut insérer les moyens géométriques, on a en désignant par q la raison :

$$B = A\, q^{m+1} \quad \text{d'où on tire : } q = \sqrt[m+1]{\frac{B}{A}}$$

en remplaçant les lettres par leurs valeurs, il vient :

$$q = \sqrt[7+1]{\frac{1792}{7}}$$

en extrayant la racine indiquée, on trouve : $q = 2$ donc :

$$:: 7 : 14 : 28 : 56 : 112 : 224 : 448 : 896 : 1792.$$

Problème 37.

On propose d'insérer quatre moyens proportionnels entre 17,524 et 39,815. Chacun de ces moyens devra être calculé à 0,001 près.

Si nous désignons par x la raison de la progression supposée géométrique, nous aurons :

$$17.524 \times x^5 = 39.815$$

d'où

$$x = \sqrt[5]{\frac{39.815}{17.524}}$$

le premier terme égalera :

$$17.524 \times \sqrt[5]{\frac{39.815}{17.524}}$$

Digitized by Google

En prenant les logarithmes, il viendra :

$$\log.\sqrt[5]{\frac{39,815}{17,524}} = \frac{1}{5}(\log 39,815 + C^{t}\log 17,524)$$

$$\log.39,815 = 1,6000467$$
$$C^{t}\log.17,524 = 2,7563668$$
$$5\log.\frac{39,815}{17,524} = 0,3564135$$

prenons le $\frac{1}{5}$ nous aurons :

$$\log.\sqrt[5]{\frac{39,815}{17,524}} = 0,0712827$$

$$\log.17,524 = 1,2436332$$

$$\log\sqrt[5]{\frac{39,815}{17,524}} = 0,0712827$$

$$\log.\text{du } 1^{er} \text{ terme} = 1;3149159$$

d'où :

1er terme = 20,649 ; 24,333 pour le 2e terme ;
28,673 pour le 3e terme ; 33,788 pour le 4e terme.

Problème 38

Insérer 3 moyens géométriques entre 1 et 10, et 3 moyens arithmétiques entre 0 et 1, avec une approximation de 0,01 sans le secours des logarithmes ?

D'après la définition de la progression géométrique si nous désignons par x la raison, on aura :

$$10 = 1 \times x^{4}$$

d'où on tire :

$$x = \sqrt[4]{10}$$

Il faudra d'abord extraire la racine carrée de 10, ce qui donnera x^{2}, d'où par une nouvelle extraction on aura :

$$x = 1,78$$

Les termes de la progression géométrique seront par suite égaux à :

1,; 1,78; 3,16; 5,62; 10.

Digitized by Google

les termes de la progression arithmétique seront égaux à :

0,; 0,25 ; 0,75 ; 1

Questions relatives au Troc.

Le Troc est un échange de marchandises. Le calcul du troc a pour objet de proportionner la valeur d'une marchandise, au prix qu'on veut avoir d'une autre marchandise ; ou de vérifier, en cas d'échange consommé, lequel des deux échangistes a fait le marché le plus avantageux.

Problème 39.

Un marchand a du café qu'il vend, argent comptant, à raison de 125 f le quintal ; mais au troc, il veut avoir 134 f. Un autre a de l'indigo qu'il vend comptant 9 f 50 la livre ; — Combien celui-ci doit-il vendre, en échange, son indigo, pour n'être point trompé ?.

Il est évident que ce marchand doit apprécier son indigo en troc, dans la même proportion que le premier estime son café, en échange, comparativement à ce qu'il le vend au comptant. On dira donc :

Si 125 f argent comptant, valent 134 f en échange, combien 9 f 50, argent comptant, vaudront-ils en troc ? On aura donc la proportion suivante :

$$x : 134 :: 9^f 50 : 125$$

d'où :

$$x = \frac{134 \times 9,50}{125} = 10^f 184$$

Ainsi le second marchand doit compter, en échange son indigo à 10 f 184 la livre.

Problème 40

Deux commerçants veulent faire un échange ; l'un a de la serge qui vaut 2 f 80 le mètre, argent comptant ; et, en échange,

Digitized by Google

il veut en avoir 3f le mètre, dont le tiers argent comptant, l'autre a de la laine qui vaut 1f la livre argent comptant. Combien doit-il la vendre, en échange pour n'essayer aucune perte ?

Puisque le second commerçant devrait payer comptant 1f par mètre de serge, dont le surplus seulement serait l'objet de l'échange, il s'en suit qu'à l'égard de ce second marchand c'est comme si le mètre de serge était à 1f80 comptant et à 2f en troc. On aura donc la proportion suivante :

$$x : 2^f :: 1 : 1,80.$$

d'où on tire :

$$x = \frac{2}{1.80} = 1^f\ 11$$

le second marchand doit donc estimer, en troc sa laine à 1f 11.

Problème 41

Un marchand a du papier qu'il vend comptant 9f50 la rame ; il voudrait l'échanger contre du savon qui se vend comptant 1f85 la livre ; mais comme le marchand de savon ne veut pas payer même en échange le papier qu'à 7f75 la rame, à combien proportionnellement, doit-il estimer son savon en troc ?

Puisque le second négociant ne veut pas, même en troc, payer le papier aussi cher que le premier veut en avoir au comptant, il est évident qu'il faudra que lui même laisse son savon, en troc à un prix inférieur à celui qu'il en exigerait au comptant.

On raisonnera donc ainsi :

Si 9f50 comptant, se réduisent en échange à 7f75, à combien 1f85 comptant, se réduisent-ils en troc ?

On aura alors à écrire la proportion :

$$x : 7,75 :: 1,85 : 9.50.$$

d'où on tire :

$$x = \frac{7.75 \times 1,85}{9.50} = 1^f 509.$$

Digitized by Google

Ainsi le savon sera compté en échange, à 1f504 la livre. C'est ce moyen le papier ne reviendra qu'à 7f75 la rame en troc.

Problème 42

De deux négociants l'un a de l'étain qui vaut 0f40 la livre, argent comptant, et qu'en échange il fait valoir 0f50; l'autre a du cuivre qui vaut 1f30, argent comptant, et qu'en troc il estime 1f50; on veut savoir lequel gagne à l'échange?

Il faut évidemment chercher ce que le marchand de cuivre, par exemple, devrait le vendre en échange; ce qui se fera par une simple règle de trois:

Si 0f40, argent comptant, valent 0f50 en échange, combien 1f30 argent comptant, vaudront-ils en troc?

On aura donc:

$$x : 0,50 :: 1,30 : 0.40$$

d'où on tire:

$$x = \frac{0,50 \times 1,30}{0,40} = 1^f625$$

Le second négociant devrait donc vendre son cuivre à raison de 1f625 la livre pour ne rien perdre au troc: donc, puisqu'il ne vend que 1f50, il perd 0f125 sur chacune.

Problème 43

Dans la supposition précédente, si le marchand de cuivre voulait avoir le tiers en argent comptant, lequel des deux ferait le marché le plus avantageux?

Puisqu'alors à l'égard du premier négociant, le troc ne porterait plus que sur les $\frac{2}{3}$ du prix du cuivre, c'est-à-dire, 1f, c'est pour lui comme si le cuivre se vendait 0f80c comptant et 1f en échange; mais comme on suppose d'ailleurs que le second négociant continue à estimer son cuivre 1f30 comptant la livre, on fera la règle de trois suivante:

Digitized by Google

Si 0f80c comptant valent 1f en troc, combien 1f30c prix réel du cuivre, argent comptant, vaudront-ils en échange? On obtient pour résultat : 1f,625 ; d'où l'on conclurait que si le marchand de cuivre échangeait à la condition du paiement d'un tiers comptant il ferait un troc égal avec l'autre marchand.

Règle de Société ou de Partage.

La Règle de Société est une opération par laquelle on partage un nombre en parties proportionnelles à des nombres donnés.

Problème 44.

Partager 100 en trois parties qui soient entr'elles comme les nombres 2, 3 et 5 sont entr'eux?

On voit immédiatement que ces parties sont 20, 30 et 50 car il est clair qu'on a :

$$20 : 30 : 50 :: 2 : 3 : 5.$$

Cette règle s'appelle Règle de Société parceque son principal usage est de partager le bénéfice ou la perte résultant d'une société de commerce en parties proportionnelles aux mises des associés et aux temps pendant lesquels les diverses mises sont restées dans le fonds social.

Les nombres proportionnels sont ceux dans la proportion desquels le partage doit avoir lieu. Ils sont les 2, 3, 5 dans l'exemple précédent. Les parties proportionnelles ou les parts sont les résultats du partage effectué.

Ce sont 20, 30 et 50 dans le même exemple. Donc la somme des parties proportionnelles ou des parts est égale au nombre à partager. Donc lorsque le nombre à partager est égal à la somme des nombres proportionnels, ceux-ci expriment précisément les parts demandées. Si, par exemple on avait à partager 43 en parties proportionnelles aux nombres 9, 14 et 20, il est évident que les parts seraient précisément 9, 14 et 20 dont la somme est en effet 43.

Digitized by Google

La règle de société est simple ou composée.

La règle de société est dite simple, lorsque la détermination des parts ne dépend que d'une seule circonstance, ou, ce qui revient au même lorsque chaque part ne correspond qu'à un seul nombre proportionnel.

Problème 45

Une somme de 256f doit être distribuée entre 4 ouvriers, proportionnellement au nombre de journées de travail de chacun d'eux; le premier a travaillé 5 jours, le deuxième 8 jours, le troisième 9 jours et le quatrième 13 jours; quelle est la part de chacun dans la somme à distribuer?

Il est évident qu'il n'y a qu'une seule circonstance, qui est la durée du travail de chaque ouvrier ainsi donc 5, 8, 9, 13 sont les nombres proportionnels qui correspondent respectivement aux quatre parts à calculer, de telle sorte que chacune de celles ci n'est représentée que par un seul nombre proportionnel.

La règle de Société est dite composée, quand la détermination des parts dépend de plusieurs circonstances ou de plusieurs rapports, c'est à dire, que la même part correspond à plusieurs nombres proportionnels différents.

Problème 46.

Partager 198f entre 4 ouvriers à proportion du nombre de mètres d'ouvrage que chacun a fait, et de la dureté du terrain dans lequel chacun a travaillé; le premier a fait 3m. d'ouvrage, le deuxième 7m., le troisième 9m. et le quatrième 12m.; le terrain dans lequel le premier ouvrier travaillait avait 13 degrés de dureté, celui du deuxième ouvrier 10 degrés; celui du troisième ouvrier 6 degrés et celui du quatrième 4 degrés; quelle est la part de chaque ouvrier?

Il y a ici, comme on le voit, deux circonstances, la quantité de travail et la difficulté de son exécution. Il est clair que chaque ouvrier doit recevoir d'autant plus qu'il a fait plus d'ouvrage; ainsi,

Digitized by Google

eu égard à cette première circonstance, il s'agirait de partager 198f, en parties proportionnelles aux nombres 5, 7, 9 et 12, et les parts seraient alors : 30f, 40f, 54f et 72f. Mais chaque ouvrier doit recevoir aussi d'autant plus, qu'il a rencontré plus de difficultés dans son travail ; conséquemment, d'après cette seconde circonstance, on devrait partager 198f en parties proportionnelles aux nombres 13, 10, 6 et 4, ce qui donnerait pour les parts respectives : 78f, 60f, 36f et 24f.

Règle. - Pour déterminer chaque part, il faut, après avoir simplifié les nombres proportionnels, c'est-à-dire les avoir divisés tous, s'il est possible par un même nombre, multiplier le nombre à partager par le nombre proportionnel correspondant à la part cherchée, et diviser le produit par la somme des nombres proportionnels, le quotient sera la part correspondante au nombre proportionnel qui a servi de multiplicateur.

Problème 47.

On propose de partager 391 en parties proportionnelles aux nombres 15, 21 et 33 ?

On observera d'abord qu'on peut diviser tous les nombres proportionnels par le même nombre 3, en sorte qu'il suffit de partager 391 en parties proportionnelles aux nombres 5, 7 et 11.

En suite, pour obtenir la première part, on multiplie 391, nombre à partager par 5, nombre proportionnel correspondant à cette première part et l'on divise le produit 1955 par 23, somme des nombres proportionnels, ce qui donne au quotient 85 pour la première part.

Les opérations entièrement semblables donnent 119 pour la seconde part et 187 pour la troisième.

Questions

Digitized by Google

Questions relatives à la Règle de Société simple.

Problème 48.

Trois personnes ont à partager la prise d'un vaisseau, la première a fait un fonds de 20000 f., la seconde de 60,000 f., la troisième de 120,000 f. On demande ce qui revient à chacune, sur la prise estimée 800,000 f., tous frais faits.?

Il est clair que la part de chaque personne, dans le bénéfice doit être d'autant plus grande que sa mise a été plus considérable, on aura donc à partager 800,000 f. en parties proportionnelles aux nombres 20,000, 60,000 et 120,000, ou simplement aux nombres 2, 6 & 12.

On aura donc, d'après la règle énoncée plus haut à disposer les calculs ainsi qu'il suit :

$$2 \text{ — } 1^{e} \text{ part — } = \frac{800.000 \times 2}{20} = 80.000^{f}.$$

$$6 \text{ — } 2^{e} \text{ part — } = \frac{800.000 \times 6}{20} = 240,000.$$

$$12 \text{ — } 3^{e} \text{ part — } = \frac{800.000 \times 12}{20} = 480,000.$$

Pour vérifier l'exactitude de ces résultats, il suffit d'additionner les nombres : 80,000 f., 240,000 f. et 480,000 f. on devra retrouver la somme à partager : 800,000 f.

Problème 49.

Quatre négociants ont fait une mise égale de fonds, mais le premier a laissé les siens dans la société pendant 18 mois, le second 13 mois, le troisième 11 mois, et le quatrième 7 mois, le bénéfice est de 4263 f., quelle est la part de chacun dans ce bénéfice ?

Il est évident qu'on répondra à la question en établissant entre les parts les mêmes rapports qu'entre les temps pendant lesquels les négociants ont laissé leurs fonds à la

Digitized by Google

disposition de la société. Le partage devra donc se faire en parties proportionnelles aux nombres 18, 13, 11 et 7. On aura donc :

18 ——— 1ère part ——— $= \frac{4263 \times 18}{49} = 1566^f$.

13 ——— 2ème part ——— $= \frac{4263 \times 13}{49} = 1131^f$.

11 ——— 3ème part ——— $= \frac{4263 \times 11}{49} = 957^f$.

7 ——— 4ème part ——— $= \frac{4263 \times 7}{49} = 609^f$.

49.

On vérifiera l'exactitude des valeurs trouvées en faisant comme précédemment, la somme des nombres 1566f, 1131f, 957f et 609f on retrouvera le nombre 4263f somme qu'il s'agissait de partager.

Règle de Société composée.

Règle. — Lorsque la détermination des parts dépend de plusieurs circonstances, il faut, après avoir disposé, dans une même colonne, les nombres proportionnels correspondants à la même part, faire le produit des nombres placés dans chacune de ces colonnes, avec l'attention de supprimer les facteurs qui seraient communs à toutes : à ce moyen l'opération revient dra à la règle de la Société simple.

Problème 50

On suppose que cinq voituriers ont conduit : le premier 90 myriagrammes de blé à 24 myriamètres ; le deuxième 110 myriagrammes à 19 myriamètres ; le troisième 170 myriagrammes à 13 myriamètres ; le quatrième 200 myriagrammes à 42 myriamètres et le cinquième 250 myriagrammes à 6 myriamètres ; que la difficulté des chemins qu'ils ont parcourus est désignée respectivement par les nombres 7, 6, 12, 5 et 8, et qu'on leur alloue 360f 60c.

Digitized by Google

pour le transport qu'ils ont effectué. On demande quelle est la part de chaque voiturier ?

Représentons par u, v, x, y et z les parts cherchées, et posons la suite de rapports qui résultent des trois conditions du problème, c'est-à-dire de :

$$u : v : x : y : z :: \begin{cases} 90 : 110 : 170 : 200 : 250 \\ 24 : 19 : 13 : 42 : 6 \\ 7 : 6 : 12 : 5 : 8 \end{cases};$$

on supprime, dans chaque colonne, les facteurs 10 et 6, communs à toutes, ce qui réduit l'expression précédente à :

$$u : v : x : y : z :: \begin{cases} 9 : 11 : 17 : 20 : 25 \\ 4 : 19 : 13 : 7 : 1 \\ 7 : 1 : 2 : 5 : 8 \end{cases};$$

enfin on multiplie entr'eux les nombres placés dans chaque colonne, et l'on obtient :

$$u : v : x : y : z :: 252 : 209 : 442 : 700 : 200,$$

de sorte que la question est ramenée au partage de 360f 60c en parties proportionnelles aux nombres 252, 209, 442; 700 et 200.

Règle. Lorsque les nombres proportionnels donnés par la question, tendent à établir entre les parts des rapports inverses de ceux qui sont demandés, il faut comparer l'une des parts avec chacune des autres, en établissant les rapports exigés par la question et alors cette part, seule étant représentée par les antécédents de tous les rapports, il suffit de réduire ces derniers au même antécédent.

Problème 51.

Un oncle laisse par testament 360.000f à cinq neveux, à condition que moins ils auront d'âge, plus ils auront; on demande la part de chacun : le premier est âgé de 30 ans, le second de 20, le troisième de 18, le quatrième de 12 et le cinquième de 10 ans ?

Il est clair que si l'on partageait la succession de

Digitized by Google

l'oncle en parties proportionnelles aux nombres 30, 20, 18, 12 et 10 on ferait tout le contraire que ce que veut le testateur, puisqu'alors chaque neveu aurait une part d'autant plus considérable qu'il serait plus âgé.

Soient donc u, v, x y et z les parts respectives des cinq neveux, à commencer par l'aîné; que l'on compare l'une de ces parts, celle de l'aîné, par exemple, à chacune des autres, on aura les règles de trois inverses suivantes, fondées sur ce que l'aîné doit avoir d'autant moins, par rapport à chacun des quatre autres neveux, que l'âge de l'un de ces derniers est plus petit à l'égard de l'âge de cet aîné.

$$u : v :: 20 : 30 \text{ ou } :: 2 : 3$$
$$u : x :: 18 : 30 \text{ ou } :: 3 : 5$$
$$u : y :: 12 : 30 \text{ ou } :: 2 : 5$$
$$u : z :: 10 : 30 \text{ ou } :: 1 : 3$$

c'est à dire, u la part de l'aîné : v celle du puîné :: au contraire 20 l'âge de celui-ci : 30 l'âge de l'aîné; de même u la part de l'aîné : x celle du troisième :: au contraire 18 l'âge du troisième : 30 celui de l'aîné; etc, etc. Mais la part de l'aîné étant représentée par les antécédents de ces nouveaux rapports, on réduira ceux-ci au même antécédent, et, toutes simplifications faites, les nombres proportionnels seront 6, 9, 10, 15 et 18.

Si l'on achève l'opération, on trouvera que la part de l'aîné est de : $37241^{f}\frac{11}{29}$; celle du second $55862^{f}\frac{2}{29}$; celle du troisième $62068^{f}\frac{23}{29}$; celle du quatrième $93105^{f}\frac{13}{29}$ et celle du cinquième $111724^{f}\frac{4}{29}$.

Problème 52

Trois négociants ont fait une société qui a duré 2 ans; le premier a mis 2000 f; au bout de 5 mois il a remis 1000 f, 2 mois après il a ajouté 500 f; enfin 13 mois après il a encore remis 1500 f. Le second a mis 3000 f, 7 mois ensuite il a ajouté 4000 f; mais au bout de 3 mois il a retiré 5500 f; et

enfin, 8 mois après, il a rapporté à la Caisse 2000 f, qui y sont restés jusqu'à l'expiration de la Société. Le troisième a mis 9000 f; mais au bout d'un mois il a retiré 3500 f 9 mois après il a retiré 1000 f, et enfin 11 mois après cette dernière époque, il a encore repris 500 f. Le bénéfice est de 2644 f 07 quelle part doit y prendre chacun de ces négociants ?

A l'égard du deuxième négociant, par exemple, on dira: il a laissé dans la Caisse de la Société 3000 f pendant 7 mois, ce qui revient à 21000 pendant 1 mois; puis au bout de 7 mois il a remis 4000 f; sa remise a donc été de 7000 f pour les 3 mois suivants, ce qui équivaut à 21000 f pendant 1 mois; mais à cette époque, il a retiré de la Caisse sociale 5500 f qu'il a conservés pendant 8 mois, sa mise n'était donc plus, pendant ces 8 mois, que de 15000 f valeur correspondante à celle de 12000 f pendant 1 mois. Enfin, à l'expiration de ces 8 mois, il a rapporté 2500 f, c'est à dire, pendant 6 mois, ainsi donc dans ce dernier intervalle, qui avait eu tout 4000 f quantité équivalente à 24000 f pendant 1 mois.

Les mises et retirements successifs du second négociant correspondent donc à une seule mise de 78000 f, qui n'auraient été que pendant 1 mois à la disposition de la Société.

Des raisonnements entièrement semblables donneront pour le premier négociant, une mise de 31500 f pendant un mois, et pour le troisième 12000 f pendant le même temps.

Il ne s'agit donc plus maintenant que de partager le bénéfice 2644 f 07 c en parties proportionnelles aux nombres 81500, 78000 et 12000, ou plutôt aux nombres 163, 156 et 240, et le calcul effectué donnera au premier négociant: 770 f 99, au second, 737 f 88 c et enfin au troisième: 1135 f 20

Digitized by Google

Intérêt simple et composé

Problème 53

On a placé une somme de 6000 f à 5 °/₀ pendant 4 ans, sans toucher aux intérêts. Quelle somme doit être remboursée au bout de ce temps ?

Au bout d'un an 1 f devient 1 f 05 par l'accumulation de l'intérêt, donc 6000 f deviennent :

$$6000 \times 1^f05$$

Cette nouvelle somme au bout d'un an sera égale à :

$$6000 \times 1^f05 \times 1^f05$$

Enfin la somme cherchée x aura pour expression :

$$x = 6000 \times 1^f05^4$$

En effectuant par logarithmes on a :

Calcul de x

$$\begin{aligned} \text{Log. } 6000 &= 3,7781513 \\ 4 \log. 1.05 &= 0.0847572 \\ \hline \log x &= 3,3629085 \\ \text{d'où : } x &= 7293^f04 \end{aligned}$$

Problème 54

Deux obligations au porteur de 1000 f chacune rapportent 50 f par an : On prend des obligations à 1045 f à quel taux l'argent est-il placé ?

Puisque 1045 f rapportent par an 50 f, 1 f rapporterait $\frac{50}{1045}$ et par suite 100 f rapporteraient :

$$x = \frac{50 \times 100}{1045} = \frac{5000}{1045}$$

et effectuant par logarithmes on a :

Calcul de x.

$$\begin{aligned} \log. 5000 &= 3,6989700 \\ \text{ct } (\log. 1045) &= 4,9808800 \\ \hline \text{Log } x &= 0,6798507 \end{aligned}$$

Digitized by Google

d'où :

$$x = 4.78$$

Ainsi donc l'argent serait placé à 4^f78 pour cent

Problème 55

Une somme de 3682^f48^c placée à intérêts composés pendant 8 ans a augmenté de 1546^f73^c; on demande quel était le taux de l'intérêt ?

L'expression :

$3682,48\,(1+r)^8$ dans laquelle on désigne par r l'intérêt que rapporte 1^f par an, doit égaler d'après l'énoncé du problème :

$$3682,48 - 1546,73$$

On aura :

$$3682,48\,(1+r)^8 = 3682,48 + 1546,73$$

ou :

$$3682,48\,(1+r)^8 = 5229,21$$

ou bien :

$$(1+r)^8 = \frac{5229.21}{3682,48}$$

d'où :

$$(1+r) = \sqrt[8]{\frac{5229.21}{3682.48}}$$

ce qui donne :

$$r = \sqrt[8]{\frac{5229.21}{3682,48}} - 1$$

et par conséquent pour le taux de l'intérêt :

$$100r = 100\sqrt[8]{\frac{5229.21}{3682,48}} - 100$$

en effectuant par logarithmes on a :

$$\log 5229.21 = 3,7184361$$

$$C^t{}_1 \log. 3682.48 = \overline{4},4338596$$

$$\log. \sqrt[8]{\ } = 0.1522957$$

$$\frac{1}{8} = 0,0190369$$

d'où :

$$\sqrt[8]{\ } = 1,0448.$$

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Digitized by Google

par suite :

le taux est égal à 4,48.

Problème 56.

A quel taux faut-il placer un capital à intérêts composés pour qu'au bout de 37 ans ce capital soit quintuplé. Résoudre le problème dans deux hypothèses.

1° En supposant qu'on réglera la somme due au prêteur tous les ans;
2° Tous les six mois.

Premiere hypothèse.

Désignons par C le capital placé, x ce que rapporte 1f par an, on aura d'après l'énoncé de la question l'égalité suivante :

$$C(1+x)^{37} = 5C$$

en supprimant le facteur C comme aux deux membres :

$$(1+x)^{37} = 5$$

en prenant les logarithmes des deux membres, on a :

$$37 \log.(1+x) \log. 5$$

d'où :

$$\log(1+x) \frac{\log 5}{37} = \frac{0.6989700}{37}$$

donc :

$$\log(1+x) = 0.01889108.$$

par suite :

$$1+x = 1,044458$$

on tire de là :

$$x = 1,044458$$

par suite le taux de l'intérêt sera égal à :

$$100 \quad x = 4,4408$$

Ainsi donc dans la première hypothèse le taux est :

4.4458

Digitized by Google

Deuxième hypothèse

En conservant les mêmes notations: $\frac{x}{2}$ représentera évidemment ce que rapporte 1f pour six mois et l'on aura comme ci-dessus l'équation:

$$(1+\frac{x}{2})^{74}=5$$

en prenant les logarithmes des membres on a:

$$74 \log.(1+\frac{x}{2} \log. 5$$

d'où

$$\log.(1+\frac{x}{2}) = \frac{\log 5}{74} = \frac{0,6989700}{74}$$

par suite

$$\log.(1+\frac{x}{2}) = 0,009441554$$

donc:

$$1+\frac{x}{2} = 1,021987$$

on tire de là:

$$\frac{x}{2} = 1,021987$$

d'où:

$$x = 0,43974$$

par suite le taux de l'intérêt sera égal à:

$$100x = 4,3974.$$

Dans la seconde hypothèse le taux est égal à: 4,3974 %

Problème 57

Quel est le capital, qui placé aujourd'hui à intérêt composé, au taux de 4½ pour cent, vaudra dans 10 ans la somme de 452837 f ?

Désignons par C le capital cherché, nous aurons évidemment l'équation:

$$C(1+0,045)^{10} = 452837$$

d'où:

$$C = \frac{452837}{(1,045)^{10}}$$

Digitized by Google

En effectuant par les logarithmes, on a :

Calcul de C

$$\log. 452837 = 5,6559419$$
$$C^{te}(-10 \log 1,045) = \bar{1},8088371$$

$$\log C = 5,4647790$$

d'où :

$$C = 291594^f 30$$

Annuités

Problème 58.

On demande quelle somme il faut payer annuellement pour rembourser en 10 années un emprunt de 4000f avec ses intérêts à 6% ?

L'annuité à payer est donnée par la formule connue :

$$a = \frac{Ar(1+r)^m}{(1+r)^m - 1},$$

dans laquelle :

$A = 4000^f$; $m = 10$; $r = \frac{6}{100}$, il vient donc :

$$a = \frac{4000 \times \frac{6}{100} \times (1+\frac{6}{100})^{10}}{(1+\frac{6}{100})^{10} - 1}$$

ou bien :

$$a = \frac{240 (\frac{106}{100})^{10}}{(\frac{106}{100})^{10} - 1}$$

En évaluant $(\frac{106}{100})^{10}$ au moyen des logarithmes, on trouve :

$$(\frac{106}{100})^{10} = 1,790849$$

par suite l'expression ci-dessus qui donne l'annuité cherchée a, deviendra :

$$a = \frac{240 \times 1,790849}{0,790849}$$

En effectuant les calculs indiqués soit par les logarithmes,

Digitized by Google

soit directement, on trouve enfin :

$$a = 543^f 47$$

Problème 59

On demande quelle somme il faut prêter pour obtenir une annuité de 500f pendant 12 ans, l'intérêt étant à 4 %?

De la formule connue :

$$a = \frac{Ar(1+r)^m}{(1+r)^m - 1}$$

On tire facilement la valeur de A, on a :

$$A = \frac{a\left[(1+r)^m - 1\right]}{r(1+r)^m}$$

Dans cette formule, on a :

$$a = 500^f ; \; m = 12 ; \; r = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

il viendra donc en remplaçant les lettres par leurs valeurs :

$$A = \frac{500\left[\left(1+\frac{1}{25}\right)^{12} - 1\right]}{\left(1+\frac{1}{25}\right)^{12} \cdot \frac{1}{25}}$$

Calculant la valeur de : $\left(1+\frac{1}{25}\right)^{12}$ ou bien de $\left(\frac{26}{25}\right)^{12}$ on trouve :

$$\left(\frac{26}{25}\right)^{12} = 1,60103$$

L'expression de A deviendra alors :

$$A = \frac{25 \times 500 \times 0.60103}{1,60103.}$$

$$A = 4692^f,53$$

c'est à l'intérêt étant 4 % il faudrait prêter 4692f53 pour recevoir pendant 12 ans une annuité de 500f

---

Problème 60

On demande le nombre d'années pendant lequel il faudra payer une annuité de 500f pour éteindre une dette

Digitized by Google

de 4692f.53, l'intérêt étant 4%?

Pour résoudre cette question nous ferons usage de la formule connue

$$m = \frac{\log a - \log (a - Ar)}{\log (1+r)}$$

dans laquelle :

$$a = 500 \ , \ A = 4692^f 53 \ ; \ r = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}) \ 1 + r = \frac{26}{25}.$$

En évaluant, $a - Ar$, on a :

$$a - Ar = 312,2988$$

Cherchant donc les logarithmes de ces nombres et portant dans l'expression de m on a :

$$m = \frac{2,6989700 - 2,4945708}{1,4149733 - 1,3979400} = 12$$

Le nombre d'années pendant lequel il faudra payer une annuité de 500f pour éteindre une dette de 4692f53 l'intérêt étant 4% est donc de 12 ans.

Problème 61.

Trouver quelle somme il faut donner annuellement pour rembourser en 12 ans, un capital de 100f avec ses intérêts pendant ce temps, l'intérêt annuel étant à 5%.

Dans cette question on connaît les quantités :

$$A = 100 \ ; \ m = 12 \ ; \ r = \frac{1}{20}.$$

et on demande l'annuité a, l'équation :

$$A(1+r)^m = \frac{a[(1+r)^m - 1]}{r}$$

étant résolue par rapport à la lettre a, donne :

$$a = \frac{Ar(1+r)^m}{(1+r)^m - 1}$$

Il faut mettre dans cette expression les valeurs des lettres A, r et m, et pour plus de facilité, calculer d'abord, au moyen de logarithmes, la quantité $(1+r)^m$ qui revient à $(\frac{21}{20})^{12}$, on trouvera :

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{12} = 1,795586$$

Digitized by Google

Au moyen de cette valeur, il viendra :

$$a = \frac{100\,\text{f}\ 1{,}79586}{1{,}79586 - 1} = \frac{5 \cdot 1{,}79586}{0{,}79586}$$

en évaluant la dernière expression, soit directement, soit par les logarithmes, on obtiendra :

$$a = 11{,}28.$$

Il faudra donc une annuité de 11f 28 pour éteindre en 12 ans, le capital 100f, le taux annuel d'intérêt étant à 5%.

Problème 62

Quelle annuité faut-il payer pendant 33 ans pour amortir un emprunt de 400000f, le premier paiement se faisant à la fin de la première année et le taux d'intérêt étant de 5%?

L'annuité demandée sera donnée par la formule connue :

$$a = \frac{Ar}{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}$$

En remplaçant les lettres par leurs valeurs on aura :

$$a = \frac{400000 \times 0{,}05}{1 - \frac{1}{(1{,}05)^{33}}}$$

ou bien :

$$a = \frac{20000}{1 - \frac{1}{(1{,}05)^{33}}}$$

donc, on aura :

$$\log a = \log 20000 - \log\left(1 - \frac{1}{(1{,}05)^{33}}\right)$$

mais :

$$\log 1{,}05 = 0{,}0211893$$

par suite :

$$\log (1{,}05)^{33} = 0{,}6992469$$

Digitized by Google

et

$$\log \frac{10}{(1.05)^{33}} = 0.3007581$$

$$\frac{1}{(1.05)^{33}} = 0.1998726$$

$$1 - \frac{1}{(1.05)^{33}} = 0.8001274$$

$$\log 8,001274 = 0,9031592$$

et

$$\log. 20000 = 5.3010300$$

donc :

$$\log x = 5.3010300 - 0.9031592$$

ou :

$$\log x = 4,3978708$$

par suite :

$$x = 24996^{f}02$$

Problème 63

On emprunte 80000^{f} à 6% pour 14 ans ; cette somme rapporte par conséquent 4800^{f} chaque année, on demande quelle somme il faudra payer pendant 14 ans pour s'acquitter à la fois du capital et de l'intérêt ?

L'annuité ou la somme à payer chaque année pour éteindre la dette, est donnée par la formule :

$$x = \frac{Ar}{1 - \frac{1}{(1+r)^{14}}}$$

en remplaçant les lettres par leurs valeurs, on aura :

$$x = \frac{30000 \times 0.06 = 4800}{1 - \frac{1}{1,06^{14}}} \qquad 1 - \frac{1}{1,06^{14}}$$

mais :

$$1,06^{-14} = 2,260904$$

donc :

Digitized by Google

$$\frac{1}{1,06^{14}} = 0.4423010$$

par suite :

$$x = \frac{4800}{0,557699}$$

en effectuant, on trouve :

$$x = 8606^f 79$$

Problème 64

Au bout de combien d'années aura-t-on amorti une somme de 100^f empruntée aux taux de 5%, si l'on paye annuellement $5^f 10$?

Le nombre d'années après lequel la dette sera éteinte est donné par la formule connue ; dans laquelle : a désigne le capital emprunté, b l'annuité ou la somme versée chaque année pour amortir la dette et r ce que rapporte 1^f. Ici :

$$a = 100^f ; \quad b = 5^f 10 ; \quad r = 0^f, 05 ;$$

Donc en remplaçant les lettres par leurs valeurs, la formule deviendra :

$$n = \frac{\log 51}{\log 1.56}$$

à cause de :

$$b - ar = 0,10$$

donc :

$$\log. 51 = 1,7075702$$
$$\log. \log. 51 = 0,2328987 +$$
$$\log 1.05 = 0,0211867$$
$$\log. \log. 1,05 = \bar{2},3261167$$

$$\log n \quad 1,9062820$$

d'où

$$n = 80$$

— La dette sera donc éteinte après 80 ans. —

Digitized by Google

Problème 65

Quelle somme doit-on payer annuellement pour amortir, au bout de 50 ans un capital de 10.000f sachant que le taux de de l'intérêt est de 4.50 % ?

L'annuité b. ou la somme qu'il faut payer chaque année pour éteindre la dette, est donnée par la formule

$$b = \frac{ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

dans laquelle :

$$a = 10000^f ; \quad n = 50 \text{ ans} ; \quad r = 0^f045 ;$$

la formule donne :

$$\log. b = \log. a + \log. r + n \log. (1+r) - \log. [(1+r)^n - 1]$$

Calculons d'abord :

$$(1+r)^n - 1$$

ou bien :

$$(1,045)^{50} - 1 = \alpha$$

on aura :

$$\log 1,045 = 0,0191162 9$$
$$50 \log. 1,045 = 0,9558145$$

par suite :

$$(1,045)^{50} - 1 = 9,03263$$

a :

$$(1,045)^{50} - 1 = \alpha = 8,03263$$

On aura alors pour déterminer b.

$$\log a = \log 10000 = 4 \ldots\ldots\ldots$$
$$\log r = \log. 0.045 = \bar{2},6532126$$
$$50 \log. 1.045 \ldots\ldots\ldots = 0,9558145$$
$$\text{ct} \log \alpha = \text{ct} \log. 8,03263 = \bar{1},0961422$$
$$\log b = 2,7041692$$

d'ou :

$$b = 506^{\text{fr}}022$$

Telle serait la somme qu'il faudrait payer annuellement.

Digitized by Google

Calculs par Logarithmes

Problème 66

Calculer le produit :

$$x = 875,6348 \times 62,82407$$

Il faudra chercher les logarithmes des deux facteurs et les additionner ce qui donnera le logarithme du produit, il restera à chercher dans les tables le nombre correspondant :

$$\log 875,6348 = 2,9423230$$
$$\log 62,82407 = 1,7981261$$

$$\log x = 4,7404491$$

d'où :

$$x = 55010,95$$

Problème 67

Calculer le produit :

$$x = 0,08756348 \times 0,006282407$$

$$\log. 0,08756348 = \bar{2},9423230$$
$$\log. 0,006282407 = \bar{3},7981261$$

$$\log x = \bar{4},7404491$$

d'où :

$$x = 0,0005501095$$

Problème 68

Calculer le produit :

$$x = 87,56348 \times 0,006282407$$

Digitized by Google

$$\log 87.56348 = 1,9423230$$
$$\log x\ 0,0062824075 = \bar{3},7981261$$
$$\log x = \bar{4}.7404491$$

d'où :

$$x = 0,5501095$$

Problème 69

Calculer le produit :

$$x = 3,14159 \times 443296$$

On a :

$$\log . 3,14159 = 0,49715$$
$$\log . 443.296 = 2,64669$$

$$\log x = 3,14384$$

d'où :

$$x = 1392,6$$

Problème 70

Quand on a à effectuer une division au moyen de logarithmes il suffit de retrancher du logarithme du dividende le logarithme du diviseur. On procède ainsi lorsqu'on n'a qu'une simple division à effectuer ; mais, comme on va le voir, quand on a une série de multiplications et de divisions à effectuer, il est préférable de n'avoir que des logarithmes à ajouter. Pour cela on transforme les logarithmes à retrancher, de telle sorte que leurs parties décimales deviennent positives.

Calculer :

$$x = \frac{236,39 \times 127,46}{564,87}$$

Il faut, comme on le sait, retrancher le logarithme 564.87 qui est : 2,7519485. On aura :

Digitized by Google

$$\log x = \log 236.39 + \log 127.46 + \text{Ct} \log 564.87$$

Il viendra alors

$$\log. 236,39 = 2\,3736291$$
$$\log. 127.56 = 2\,1053739$$
$$\log. 564,87 = \bar{3}\,2490\,5\,1$$

$$\log x = 1,7270345$$

d'où :

$$x = 53,34019$$

Quand on a rendu la partie décimale de ($-\log 384,87$) positive on additionne les parties décimales des 3 logarithmes ; la soustraction ne porte plus alors que sur la caractéristique, ce qui donne :

$$2 + 2 - 3 = 4 - 3 = 1$$

Problème 71

Calculer :

$$x = \frac{0.23639 \times 1.2746}{0,0056487}$$

On aura, d'après ce qui vient d'être dit :

$$\log. 0.23639 = \bar{1},3736291$$
$$\log. 1.2746 = 0,1053739$$
$$\log. 0,0050487 = 2,2480515$$

$$\log x = 1,7270545$$

d'où :

$$x = 53.34019$$

De ce qui précède on peut donc dire : Pour retrancher un logarithme on ajoute une unité à la caractéristique, puis on change ensuite le signe et l'on écrit à la suite le complément arithmétique de la partie décimale.

Digitized by Google

Problème 72

Pour élever un nombre à une puissance, on multiplie le logarithme du nombre par l'indice de la puissance.

Calculer :

$$x = \frac{2^5}{37}$$

D'après ce que nous venons de dire ; on aura :

$$\log. 2 = 0,30103000$$
$$\log. 37 = \bar{2},43179828.$$

$$\log. \frac{2}{37} = \bar{2},73282328$$
$$\log. x = \bar{7},6641414$$

d'où :

$$x = 0,0000004614678$$

Problème 73

Calculer :

$$x = 5^{10}$$

On aura évidemment :

$$\log 5 = 3,69897000$$
$$\log x = 6,9897000$$

d'où :

$$x = 9765624$$

Problème 74

Calculer :

$$x = 0,4326^3$$

On aura comme précédemment :

$$\log 0,4326 = \bar{1},6360865$$
$$\log x = \bar{2},9082595$$

d'où :

$$x = 0,08095794.$$

Digitized by Google

Problème 75

Pour extraire la racine d'un nombre, on divise le logarithme de ce nombre par l'indice de la racine.

Calculer :

$$x = \sqrt[3]{478928}.$$

On aura :

$$\log 478928 = 5,6802702$$
$$\log x = 1,8934234$$

d'où :

$$x = 78,24$$

Problème 76

Calculer :

$$x = \sqrt[3]{0,0000098763}$$

On aura de même :

$$\log. 0,0000098763 = \bar{3},9945943$$
$$\log x = \bar{2},9989189$$

d'où :

$$x = 0,0997514$$

Problème 77

Calculer :

$$x = \sqrt[5]{\frac{1}{375} \times 0,5142}$$

On aura immédiatement :

$$\log x = \frac{1}{5}\left(\log \frac{1}{375} + \log. 0.5142\right)$$

Mais :

$$\log \frac{1}{375} = \log. 1 - \log. 375 = \bar{3},4259687$$

puis

Digitized by Google

$$\log 0,5142 = 1,7111321$$

donc :

$$\log \frac{1}{376} + \log 0.5142 = \bar{3},1371008$$

et :

$$\frac{1}{5}\left(\log\frac{1}{376} + \log 0,5142\right) = 1,4274202$$

par suite, le nombre correspondant x est :

$$x = 0,2675594$$

Problème 78

Calculer :

$$x = \frac{\sqrt[7]{36926,5^3} \times \sqrt[5]{2629}}{\sqrt[3]{6258.96}}$$

On aura :

$$\log x = \frac{3}{7}\log 36926,5 + \frac{1}{5}\log 2629 - \frac{2}{3}\log 6258.96$$

Il viendra alors :

$$\frac{3}{7}\log 36926,5 = 1,9574307$$
$$\frac{1}{5}\log 2629 = 0,6839581$$
$$\frac{2}{3}\log 6258,96 = 2,5310015$$

$$\log x = 0,1103873$$

d'où :

$$x = 1,289399.$$

Problème 79

Calculer la valeur de l'expression :

$$R = \frac{60^{\mathrm{m}},567 \text{ tang } 53^\circ 43' \times 0,785}{0,760\,(1+25\times 0,00018018)(1+25\times 0,00367)}$$

$$- \frac{0^{\mathrm{m}},067 \text{ tang}^3\, 53^\circ 43' \times 0,785}{0,760\,(1+25\times 0,00018018)(1+25\times 0,00367)}$$

Calcul

Digitized by Google

Calcul du 1er terme

log 60",567 =	1,7322361
log tang 53° 43' =	0,1342398
log 0,785 =	$\bar{1}$,8948697
Ct log 0,760 =	0,1191864
Ct log 1,0045045 =	$\bar{1}$,9980481
Ct log 1,09175 =	$\bar{1}$,9618943
log 1er terme =	8,904644
d'où 1er terme =	1' 17",70

Calcul du 2e terme

log 0",067 =	$\bar{2}$,8260748
3 log tang 53° 43' =	0,4026894
log. 0.785 =	$\bar{1}$,8948697
Ct log. 0,760 =	0,1191864
Ct log. 1,0045045 =	$\bar{1}$,9980481
Ct log. 1.09175 =	$\bar{1}$,9618943
log. 2e terme =	$\bar{1}$,2027627
d'où 2e terme =	0,1596

par suite :

$$R = 1'17''70 - 0,16$$
$$R = 1'17''54$$

Problème 80

Calculer la valeur de l'expression :

$$E = 2e \frac{\sin nt}{\sin 1''} + \frac{5 \sin 2nt}{4 \sin 1''}$$

dans laquelle :

$$nt = 123°32'39'',88, \quad e = 0,0167669763$$

Digitized by Google

Calcul du 1er terme

$2e = 0,335339526$; $\log = \bar{2},5255477$

$C^t \log \sin 1'' = \quad = 5,3144251$

$\log \sin 123°32'29'',88 = \bar{1},9208834$

$\log$. 1er terme $= 3,7608562$

1er terme $= 5765'',75$.

Calcul du 2e terme.

$2 \log e = \bar{4},4489096$

$C^t \log \sin 1'' = 5,3144251$

$\log \sin 247°5'19'',76 = \bar{1},9643115$ –

$\log 5 = 0,6989700$

$C^t \log 4 = \bar{1},3979400$

$\log$ 2e terme $= 1,8245562$

2e terme $= 66'',76$

par suite :

$$E = 5765'',75 - 66'',76 = 5698'',99 = 1°34'58'',99$$

Problème 31

Calculer la valeur de l'expression :

$$e = E - \tang\frac{\omega}{2}\,\frac{\sin 2L}{\sin 1''} + \frac{1}{2}\tang\frac{\omega}{2}\,\frac{\sin 4L}{\sin 1''} - \frac{1}{3}\tang\frac{\omega}{2}\,\frac{\sin 6L}{\sin 1''}$$

dans laquelle :

$$E = 1°34'58'',99\ ;\ \omega = 23°27'29'',16\ ;\ L\ 45°37'37'',3$$

On conclut :

$$\frac{\omega}{2} = H°43'44'',58\ ;\ 2L = 91°15'14'',6\ ;\ 4L\ 182°30'29'',2\ ;\ 6L\ 273°45'43''$$

Calcul du 2e terme

$2 \log \tang\ 11°43'44'',58 = \bar{2},6345336$

$\log \sin\ 91°15'14'',6 = \bar{1},9998969$

$C^t \log \sin\ 1'' = \bar{5},3144251$

$\log$ 2e terme $= 3,9488546$

d'où 2e terme $= 8889'',03 = 2°28'93'',03$

Digitized by Google

Calcul du 3ème terme

4 log tang 11°43'44",58 = $\bar{3}$, 2690672
log sin 182°30'29",2 = $\bar{2}$, 6410854 –
Ct log 2 = $\bar{1}$, 6989700
Ct log sin 1" = 5, 3144251

log 3e terme = 0, 9235477
d'où 3e terme = 8", 3858.

Calculer enfin la valeur du 4e terme :

Calcul du 4e terme

6 log tang 11°43'44",58 = $\bar{5}$, 9036008
log sin 273°45'43",8 = $\bar{1}$, 9990630
Ct log 3 = $\bar{1}$, 5228787
Ct log sin 1" = 5, 3144251

log. 4e terme = 0, 7399676
d'où : 4e terme = 5" 495

donc :

$$E = 1°34'58",99 - (2°28'9",03) - 8",3858 + 5",495 = -53'12",94$$

Problème 82

Calculer la valeur de l'expression :

$$r = a\left[(1 - e\cos nt) + \frac{e^2}{2}(1 - \cos^2 nt)\right] + \ldots\ldots$$

dans laquelle :

$$e = 0,0167669763 ; \quad nt = 183°32'39",88$$

L'expression proposée peut s'écrire :

$$r = a(1 - e\cos nt + e^2\sin^2 nt) + \ldots$$

Calcul du terme : e cos nt.

log e = $\bar{2}$, 2244548
log cos nt = $\bar{1}$, 7428980
log 2e terme = $\bar{3}$, 9668528

Digitized by Google

d'où : 2e terme = 0,0092651

Calculons maintenant le dernier terme $e^2 \sin^2 nt$.

Calcul de $e^2 \sin^2 nt$

$$2 \log e = \bar{4},4489096$$
$$2 \log \sin nt = \bar{1},3417668$$

$$\log. 3^e \text{ terme} = \bar{4},2906764$$

d'où :

$$3^e \text{ terme} = 0,00019529$$

donc :

$$r = a : 1 + 0,0092651 + 0,00019529 = a \times 1,0094603 9$$

Problème 83

Calculer la valeur de l'expression :

$$D = \frac{(1-\alpha)}{\sin 1''} \sqrt{\frac{2}{r}} \sqrt{e}$$

dans laquelle :

$$(1-\alpha) = 0,92 \; ; \; r = 6366698 \; ; \; e = 6^{m}$$

En opérant par logarithmes, on a :

$$\log D = \log (1-\alpha) + C^t \log \sin 1'' + \frac{\log 2 + C^t \log r}{2} + \frac{1}{2} \log e.$$

Calcul de D

$$\log (1-\alpha) = \bar{1},9637878$$
$$C^t \log \sin 1'' = 5,3144250$$
$$\log \sqrt{\frac{2}{r}} = \bar{4},7485578$$
$$\log \sqrt{e} = 0,3890756$$

$$\log D = 2,4158462$$

d'où :

$$D = 261'' = 4'21''$$

Digitized by Google

Problème 84

Calculer la valeur de l'expression :

$$t = \sqrt[4]{\frac{12e}{12\alpha^2 \sin 1'' \operatorname{tg} L_0 + 6\alpha^2 \sin 1'' \operatorname{tg} H_m}}$$

$$L_0 = 50° ; \; H_m = 43°$$

Calcul du 1er terme : $12\alpha^2 \sin 1'' \operatorname{tg} L_0$

log 12	=	1,0791812
2 log 1,72	=	0,4710568
log sin 1"	=	4,6855749
log tang 50°	=	0,0761865
log. 1er terme	=	$\bar{4}$,3311994
d'où 1er terme	=	0,00020511

Calcul du terme $6\alpha^2 \sin 1'' \operatorname{tg} H_m$

log 6	=	0,7781512
2 log 1,72	=	0,4710568
log sin 1"	=	4,6855749
log tang 43°	=	$\bar{1}$,9696559
log 2e terme	=	$\bar{5}$,9044388
d'où : 2e terme	=	0,000080249
1er terme + 2e terme	=	0,00028536
Ct log. 0,00028536	=	3,5446060
log. 720"	=	2,8573325
		6,4019394

par suite :

$$\log \sqrt[4]{} = 1,6004848$$

on conclut :

$$t = 39^{\text{min}}\ 8^{s}$$

Digitized by Google

Problème 85

Calculer la valeur des deux expressions :

$$\text{tang } R = \text{tang } L \cos u \; ; \; \sin D = \sin L \sin \omega$$

sachant que :

$$L = 45°37'37'',3 \; ; \; \omega = 23°27'29'',16$$

Calcul de R

log. tang L = 0,0095063
log. cos ω = $\bar{1}$,9625351

log. tang R = $\bar{1}$,9720414
d'où R = 43° 9' 25"

Calcul de D

log sin L = $\bar{1}$,8541861
log sin ω = $\bar{1}$,5999718

log. sin D = $\bar{1}$,4541579
d'où : D = 16°31'55",00

Digitized by Google

Géométrie

Problèmes divers.

Problème 86

Le diamètre d'une pièce de 40 f est de 26 m.m, quelle est la longueur de sa circonférence ?

Pour résoudre ce problème il suffit évidemment de multiplier le diamètre de la pièce par le rapport de la circonférence au diamètre. Pour avoir le résultat à moins de $\frac{1}{10}$ de millimètre, nous ferons usage du rapport d'Archimède qui est : $\frac{7}{22}$, en désignant par l la longueur cherchée, on aura donc :

$$l = 0^{m},026 \times \frac{22}{7} = 0^{m},081.$$

Problème 87

Trouver le diamètre d'un bassin circulaire dont la circonférence a $82^{m},7$?

On a vu dans le problème précédent que pour obtenir la longueur de la circonférence d'un cercle quand on a son diamètre, il faut multiplier ce diamètre par le nombre π ; réciproquement. Si c'est la circonférence qui est donnée, en la divisant par ce même nombre π on aura son diamètre.

Pour obtenir le quotient à moins d'un centième, nous ferons usage du rapport de Métius qui est : $\frac{355}{113}$. On aura donc en désignant par D le diamètre cherché.

Digitized by Google

$$D = \frac{32^m,7 \times 113}{355} = 26^m\,32$$

Problème 88

Le diamètre des roues de derrière d'une voiture est de $1^m,2$; celui des roues de devant est $0^m,8$; combien de tours fait chacune de ces roues, quand la voiture parcourt un espace d'un kilomètre ?

Pour calculer la circonférence de la roue de derrière, il faut multiplier le diamètre $1^m,2$ par le nombre $\pi = 3,1416$ effectuant le calcul on trouve pour produit $3^m,77$. Un kilomètre vaut 1000^m ; divisons donc 1000 par le nombre $3^m,77$, le quotient exprimera évidemment le nombre de tours faits par la roue de derrière. On trouve en effectuant la division :

$$\frac{1000}{3^m,77} = 265$$

en négligeant les fractions. La roue de derrière fait donc 265 tours dans le parcours de 1 kilomètre. Les nombres de tours de roues doivent être en raison inverse de leurs diamètres. On aura donc en désignant par x le nombre de tours faits par la roue de devant :

$$\frac{0^m,8}{1^m,2} = \frac{265}{x}$$

d'où :

$$x = \frac{1^m,2 \times 265}{0^m,8} = 397 \text{ environ.}$$

La roue de devant fait 397 tours dans le parcours de 1 kilomètre.

Problème 89.

Le cercle méridien dont on se sert en astronomie a $0^m,92$ de diamètre ; quelle est sur sa circonférence la longueur d'un arc de 18°26 ?

La longueur l de la circonférence de ce cercle est égale à :

$$l = 0^m,92 \times 3,141 = 2^m,890$$

Digitized by Google

Si donc nous appelons x la longueur cherchée de l'arc proposé, nous aurons évidemment :

$$x = 2^m,890 \times \frac{18°26'}{360°}$$

ou bien en réduisant en minutes :

$$x = 2^m,890 \times \frac{1106}{21160} = 0^m,148.$$

Problème 90

Deux lieux situés sous l'équateur sont à 5°17 de distance en longitude, exprimer cette distance en myriamètres?

La circonférence de l'équateur est, comme on le sait, égale à :

$$C = 40067772^m$$

Si donc nous désignons par x la distance cherchée il est clair qu'on aura :

$$\frac{360°}{5°17'} = \frac{40067772}{x}$$

ou en réduisant en minutes :

$$\frac{21600}{317'} = \frac{40067772}{x}$$

d'où :

$$x = \frac{40067772}{21600} = 588032^m$$

ou bien :

$$x = 58^{mm}\text{,}8$$

Problème 91

Le rayon de l'équateur est de 6376984^m quel est le chemin décrit par chacun des points de la circonférence dans l'espace d'une seconde ?

Le diamètre D de l'équateur est égal à :

$$D = 2 \times 6376984^m = 12753968^m$$

Digitized by Google

On aura la circonférence équatoriale en multipliant la valeur de D par le nombre $\pi = 3,14159265$ ce qui donnera pour la circonférence C :

$$C = 12753468 \times 3,14159265 = 40067772^{m}$$

Tel est le chemin que parcourt en 24 heures chacun des points de l'équateur terrestre. Pour connaître le chemin qu'un de ses points parcourt en une seconde, il suffit évidemment de diviser la longueur de la circonférence C par le nombre de secondes contenues dans 24 heures. On sait que dans 24 heures il y a 86400s donc en désignant par x le chemin cherché on aura :

$$x = \frac{40067772}{86400} = 463^{m}7$$

Problème 92

Sous le 47e degré de latitude, chaque degré de longitude vaut 75782m ; quel est le rayon de ce parallèle ?

En multipliant par 360 la valeur de chaque degré, on aura évidemment la longueur de la circonférence entière ; on trouve pour produit :

27281520.

Pour avoir le diamètre D de cette circonférence, il suffit de diviser le nombre de mètres ci-dessus par le nombre $\pi = 3,1415926$..... ce qui donnera :

$$D = \frac{27281520}{3,1415926} = 8683978^{m}$$

Le rayon R cherché est donc égal à :

$$R = \frac{8683978}{2} = 4341989$$

Problème 93

Le plancher d'une salle carrée a 5m23 de longueur ; quelle est sa superficie ?

Digitized by Google

Le côté du carré contient 523 cent. ; par conséquent la superficie cherchée s'obtiendra en multipliant le nombre par lui-même ce qui donnera :

$$S = 523 \times 523 = 273529 \text{ cent. carrés}$$

ou bien :

$$S = 27^{m.q}\ 35^{d.q}\ 29^{c.q}.$$

Problème 94

La toile d'un tableau, de forme rectangulaire a 4m 23 de largeur sur 2m 61 de hauteur ; quelle est sa superficie.

En réduisant les mesures en centimètres, on aura : largeur de la toile = 423 cent. ; la hauteur 261 cent. La superficie cherchée est donc, d'après les éléments de la Géométrie ;

$$S = 423 \times 261 = 110403 \text{ cent. carrés}.$$

$$S = 11^{m.q}\ 04^{d.q}\ 03^{cent.q}$$

Problème 95.

Une pièce de terre a la forme d'un trapèze, dont la hauteur est de 97m et dont les bases ont respectivement 231m et 145m ; On propose de calculer la surface de ce trapèze ?

On démontre, en géométrie élémentaire, que la surface d'un trapèze s'obtient en multipliant la demi-somme des bases par la hauteur, c'est à dire que :

$$S = \frac{B+b}{2} \times H$$

B et b étant les bases supérieure et inférieure, remplaçant les lettres par leurs valeurs on aura :

$$S = \frac{376}{2} \times 97 = 18236^{m.q}.$$

ou bien :

$$S = 1^{\text{hectare}}\ 82^{\text{ares}}\ 36^{\text{centiares}}$$

Digitized by Google

Problème 96.

Un bassin de forme circulaire à $21^{m}6$ de diamètre, quelle est sa superficie ?

Le rayon du bassin est égal à :

$$R = \frac{21.6}{2} = 10^{m},8$$

Pour obtenir la surface S^2 d'un cercle de rayon R on se sert de la formule :

$$S = \pi R^2$$

ou en remplaçant les lettres par leurs valeurs

$$S = 3.1416 \times 10^{m}8^{2}$$

le carré de $10^{m}8$ est de $116^{m.q}64$, donc :

$$S = 3,1416 \times 116^{m.q}; 64 = 366^{m.q}43$$

à moins d'un décimètre carré près.

Problème 97

Le diamètre d'une pièce de 40^{f} étant de $0^{m}026$, quelle est la superficie de l'une de ses faces ?

Le rayon de cette pièce est égal à :

$$R = \frac{0^{m}026}{2} = 0^{m}013$$

La surface est donnée par la formule :

$$S = \pi R^2$$

ou bien :

$$S \frac{22}{7} \times 0^{m},013^{2}$$

le carré de $0^{m}013$ est $169^{m.m}$. On aura donc :

$$S = \frac{22}{7} \times 169 = 531^{mil.q}$$

ou bien :

$$S = 5^{c.q}.31^{mil.q}$$

Problème 98

Quel rayon faut-il donner à un cercle pour que

Digitized by Google

sa superficie soit de $6^{m.q.}$?

Puisqu'on obtient l'aire d'un cercle en multipliant le carré du rayon par le rapport de la circonférence au diamètre, en divisant l'aire d'un cercle par ce rapport on obtiendra le rayon. On aura donc :

$$R^2 = \frac{6^{m.q}}{\frac{7}{22}} = \frac{6 \times 22}{7} = 1,9091.$$

Il suffit dès lors pour avoir R d'extraire la racine carrée de $1^{m.q}$ 9091 ce qui donne en effectuant :

$$R = 1^{m}38.$$

Problème 99.

Quelle est, en lieues carrées, l'aire d'un cercle qui a pour circonférence l'équateur ?

La circonférence est composée de 360°, dont chacun vaut 25 lieues équivalant à 9000 lieues. Par suite son diamètre vaudra :

$$\frac{9000}{3,1415926} = 2864^{\text{lieues}},7890$$

donc, le rayon équivaut à :

$$R = 1432^{\text{lieues}}3945$$

En multipliant la circonférence par le rayon on obtient :

12891550 lieues carrées,

par suite l'aire cherchée qui a pour valeur la moitié de ce produit, équivaut à :

$$A = 6446775 \text{ lieues carrées}$$

Problème 100

Quelle est, sur un cercle de 10^{m} de rayon, l'aire d'un secteur dont l'angle au centre est 75° ?

L'aire d'un secteur est donnée par la formule connue :

Digitized by Google

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360^\circ}$$

Remplaçons donc les lettres par leurs valeurs ; on aura :

$$S = \frac{3.1416 \times 100^{m.q.} \times 75^\circ}{360^\circ} = 65^{m.q.},45.$$

Problème 101

Dans un cercle de 12 centimètres de diamètre, quelle valeur faut-il donner à l'angle au centre d'un secteur pour que son aire soit équivalente à 50 c.q. ?

La formule qui donne l'aire d'un secteur est comme on sait :

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360^\circ}$$

d'où on tire :

$$n = \frac{360 \times S}{\pi R^2}$$

en remplaçant les lettres par leurs valeurs, on a :

$$n = \frac{360 \times 50^{c.q.}}{3.14\cancel{16} = 114^{cc}/36} = \cancel{30^\circ\ 47'\ 18'',4}\ 159^\circ\ 14'\ 46''\ 6/10$$

Calculé pour 12 c de rayon et non de diamètre

Problème 102

L'aire d'un secteur est de 32 centimètres carrés, et son angle au centre est de 48°, quel est le rayon du cercle auquel il appartient ?

La formule qui donne l'aire du secteur est :

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360^\circ}$$

d'où on tire :

$$R = \sqrt{\frac{360 \times S}{\pi n}}$$

en remplaçant les lettres par leurs valeurs, on aura :

Digitized by Google

$$R = \sqrt{\frac{360.32^{cq.}}{3,1416 \times 48}} = 0^{m},374$$

Problème 103

Quel rayon faut-il donner à une sphère pour que l'aire de sa surface soit équivalente à 1 mètre carré ?

L'aire de la sphère est donnée par la formule :

$$S = 4\pi R^2$$

c'est à dire qu'elle est égale à 4 fois l'aire d'un grand cercle, ou bien qu'elle est équivalente à quatre grands cercles, l'aire de chacun de ces cercles doit donc valoir le quart d'un mètre carré, ou 25 décimètres carrés. Or l'aire d'un cercle a pour mesure le produit du carré de son rayon par le rapport π de la circonférence au diamètre ; si donc on divise : $25^{dq.}$ par le nombre constant $\pi = 3,14159265$ on aura pour quotient le carré du rayon cherché. On trouve en effectuant :

$$R^2 = 7^{dec},9577$$

par suite :

$$R = \sqrt{9^{dec},9577} = 0^{m}.282$$

Problème 104.

On a employé 35 feuilles d'or battu, pour dorer une boule de 2 décimètres de rayon ; Combien en faudra-t-il pour dorer une boule dont le rayon aurait 3 décimètres ?

La quantité de matière employée peut-être considérée comme proportionnelle aux surfaces, et par suite aux carrés de leurs rayons, en nommant x le nombre de feuilles d'or qu'il faudrait pour dorer une boule de 3 décimètres de rayon, on aura :

$$\frac{x}{35} = \frac{3^2}{2^2}$$

ou bien :

$$\frac{x}{35} = \frac{9}{4}$$

d'où on tire :

Digitized by Google

$$x = \frac{35 \times 9}{4} = \frac{315}{4} = 78 + \frac{3}{4}$$

Il faudrait 78 feuilles $+ \frac{3}{4}$ ou en nombre rond 79

Problème 105

Quel est le volume d'air contenu dans une salle rectangulaire qui a $10^{m},42$ de longueur sur $7^{m},51$ de largeur et $3^{m},85$ de hauteur ?

Le volume de la salle est égal au volume d'un parallélipipède qui aurait pour dimensions :

$$10^{m},42 \quad , \quad 7^{m},51 \text{ et } 3^{m},85$$

Le volume cherché équivaut donc à :

$$V = 1042 \times 751 \times 385$$

en réduisant les mesures en centimètres, en effectuant, on trouve :

$$V = 301278670^{c.cub.}$$

ou bien :

$$V = 30^{mc}, 278^{dc}, 670^{cc}$$

Problème 106.

Une pile de bois a $13^{m},4$ de longueur, 5^{m} de largeur et $7^{m},2$ de hauteur ; on demande d'évaluer en stères la quantité de bois qu'elle contient ?

La forme donnée aux piles de bois dans les chantiers est celle d'un parallélipipède rectangle. On sait que le volume du parallélipipède s'obtient en multipliant les trois dimensions, on aura donc, pour le volume cherché évalué en décimètres cubes

$$V = 134 \times 50 \times 72 = 482400^{dc}$$

ou bien :

$$V = 482^{mc},400^{dc}$$

et par conséquent à :

$$482^{stères}, 4^{décist.}$$

Digitized by Google

Problème 107

Un bassin rectangulaire qui a $6^{m},4$ de longueur, $3^{m},5$ de largeur et $2^{m},7$ de profondeur, est rempli d'eau aux deux tiers de sa hauteur, Combien d'hectolitres d'eau contient-il ?

Evaluons les dimensions en décimètres pour plus de simplicité, on aura : 64^{d}; 35^{d}; 27^{d}; L'eau contenue dans le bassin forme évidemment un parallélépipède rectangle : dont les arêtes ont pour dimensions :

$$64^{d} \text{ et } 35^{d}$$

et pour profondeur : 18^{d} puisque le bassin n'est rempli qu'aux $\frac{2}{3}$. Le volume du parallélépipède sera donc :

$$V = 64 \times 35 \times 18 = 40320 \text{ décim cub.}$$

ou bien :

$$V = 40320 \text{ litres}$$

ou encore :

$$V = 403^{\text{hectol}},20 \text{ litres.}$$

+ Problème 108

Quelle profondeur faut-il donner à un reservoir cylindrique de 7^{m} de rayon, pour qu'il puisse contenir 3850 hectolitres d'eau ?

Le volume d'un cylindre est donné par la formule connue :

$$V = \pi R^{2} H$$

R désigne le rayon de la base, H la hauteur du cylindre et π le rapport de la circonférence au diamètre. En remplaçant les lettres par leurs valeurs on aura :

$$385000^{\text{dec. cub.}} = \frac{22}{7} \times 49^{\text{m q}} \times H$$

d'où on tire :

$$H = \frac{385000}{\frac{22}{7} \times 49} = \frac{385000}{154} = 2^{m},5$$

Digitized by Google

Il faudrait donc au réservoir cylindrique une profondeur de $2^m,5$.

Problème 109.

Quel est le volume d'un cône dont la hauteur est de $0^m,52$ et dont la base a $0^m,23$ de rayon ?

L'aire de la base est donnée par la formule connue :

$$B = \pi R^2$$

ou bien :

$$B = \frac{22}{7} \times (0^m,23)^2$$

donc le volume V du cône est :

$$V = \frac{B \times H}{3}$$

ou bien :

$$V = \frac{22 \times (0^m,23)^2 \times 0^m,52}{7 \times 3}$$

en effectuant, on trouve :

$$V = 0^{mc},028818.$$

Problème 110.

La hauteur d'un cône est de $1^m,6$; son côté à 2^m, quel est son volume ?

L'axe du cône, son côté et le rayon de sa base forment un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le côté donné : 2^m. Il est évident qu'on aura le carré du rayon R en retranchant le carré de la hauteur qui est égale à $1^m,6$ du carré du côté donné ; en réduisant les données en décimètres, on aura :

$$\overline{20}^2 - \overline{16}^2 = 144 \text{ décimètres carrés}$$

L'aire de la base est :

$$B = \pi R^2$$

ou bien :

$$B = \frac{22}{7} \times 144.$$

par suite le volume du cône, sera égal à :

Digitized by Google

$$V = \frac{B \times H}{3}$$

ou bien :

$$V = \frac{22 \times 144 \times 16}{7 \times 3}$$

en effectuant, on trouve :

$$V = 2413^{\text{d. cub}}$$

ou :

$$V = 2^{\text{m.c}},413^{\text{dc.}}$$

Problème 111.

Le volume d'un cône est égal à $1^{\text{m. cub}}$, et le rayon de sa base est le tiers de sa hauteur ; quelle est la valeur de ce rayon ?

Désignons par R et par H le rayon et la hauteur du cône ; on sait que le volume d'un cône est donné par la formule :

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

et comme, d'après l'énoncé, H est le triple du rayon R on aura :

$$V = \frac{\pi R^2 \times 3R}{3}$$

ou bien :

$$V = \pi R^3$$

en remplaçant les lettres par leurs valeurs, on trouve :

$$1^{\text{mc}} = 3,1416 \times R^3$$

d'où on tire :

$$R = \sqrt[3]{\frac{1}{3,1416}}$$

en effectuant, on trouve :

$$R = 0^{\text{m}}.682$$

Digitized by Google

1er Problème 112.

Un bassin à ses murs en talus, le fond est un carré dont le côté a 30m; les bords forment aussi un carré dont le côté a 32m, et la profondeur du bassin est de 4m; on demande sa capacité en hectolitres ?

Comme il est facile de s'en assurer en traçant sur le papier la figure, on voit que le bassin a la forme d'une pyramide tronquée. L'aire de la grande base est égale à

$$A = 32 \times 32 = 1024^{mq};$$

l'aire de la petite base est :

$$A' = 30 \times 30 = 900^{mq};$$

la moyenne géométrique entre ces deux bases est égale à :

$$\sqrt{1024 \times 900} = 960^{mq}.$$

Par suite le bassin a une capacité égale à :

$$V = 4^{m} \times \left(\frac{1024 + 900 + 960}{3} \right)$$

ou bien :

$$V = \frac{4 \times 2884}{3} = 3845^{mc},333$$

ce qui revient :

$$3845333^{d.cub}$$

ou bien :

$$3845333^{litres}$$

divisant ce nombre par 100 on a enfin pour le volume V en hectolitres :

$$V = 38453^{hect}.33^{litres}$$

Problème 113.

On demande la capacité d'un cuvier dont le fond a 1m,12 de rayon, le bord supérieur 1m,38 de rayon, et dont la profondeur est de 1m,54 ?

La forme d'un cuvier est celle d'un cône tronqué.

Digitized by Google

On démontre, en géométrie élémentaire, que le volume d'un cône tronqué est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + r^2 + R \times r)$$

H désignant la hauteur du cône tronqué et R et r les rayons des bases supérieure et inférieure ; on aura en remplaçant les lettres par leurs valeurs :

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 1^m,54 \times [(1^m,38)^2 + (1^m,12)^2 + 1^m,38 \times 1^m,12]$$

ou bien :

$$V = \frac{22}{21} \times 1^m,54 \times [1^{m.q},9044 + 1^{m.q},2544 + 1^{m.q},5456]$$

ou encore :

$$V = \frac{22}{21} \times 1^m,54 \times 4^{m.q},7044$$

en effectuant, on trouve :

$$V = 7^{m.cub},244776$$

ou :

$$V = 72^{hect.}\ 48^{litres}$$

Problème 114

Quel est le volume d'un boulet qui a $0^m,22$ de diamètre ?

Le volume du boulet est le volume d'une sphère qui aurait pour rayon : $R = \frac{0^m,22}{2} = 0^m,11$. On sait, que le volume de la sphère a pour expression :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

le cube de R est :

$$R^3 = 1331^{c.cub}$$

par suite le volume V sera égal à :

$$V = 1331 \times 4,1888$$

en effectuant :

$$V = 5^{d.cub},575^{c.cub},293^{mill.cub}$$

Problème 115.

Quel est le volume d'une sphère dont la surface équivaut

Digitized by Google

à un mètre carré ?

Nommons R le rayon de la sphère, S sa surface V le volume cherché. Il est évident que nous aurons les deux équations :

$$[1]\ S = 4\pi R^2$$

$$[2]\ V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

De l'équation [1] tirons la valeur R et substituons cette valeur dans la deuxième équation, on aura pour l'expression du volume cherché V :

$$V = \frac{S\sqrt{S}}{6\sqrt{\pi}}$$

Remplaçons les lettres par leurs valeurs, on aura :

$$V = \frac{1^{m.cub}}{6\sqrt{3,141592}}$$

en effectuant, on trouve :

$$V = 0^{m.cub},094.$$

Problème 116.

Quel diamètre faut-il donner à un bassin demi-sphérique pour que sa capacité soit de 50 hectolitres ?

Désignons par R le rayon de ce bassin ; le volume d'un bassin demi-sphérique, on aura pour expression :

$$V\frac{2}{3}\pi R^3 ;$$

mais le volume V est égal à 50^{hect} ou 5000^{litres} ou encore $5000^{d.cub}$; on devra donc avoir :

$$5000^{d.cub} = \frac{2}{3}\pi R^3$$

ou bien :

$$5000^{d.cub} = \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times R^3$$

ou encore :

$$5000^{d.cub} = \frac{44}{21} \times R^3$$

d'où :

$$R^3 = 2386^{d.cub},336$$

d'où enfin :

$$R = \sqrt[3]{2386^{d.cub},336}$$

Digitized by Google

effectuant on trouve :

$$R = 13^{\text{dm}},3$$

par suite le diamètre cherché D, est :

$$D = 26^{\text{dm}},6$$

ou :

$$D = 2^{\text{m}},66.$$

Problème 117

Un bassin a la forme d'une demi-sphère, dont le diamètre est de 3^{m}; il est rempli d'eau jusqu'à une hauteur de $1^{\text{m}},2$, à partir du point le plus bas ; quelle est la quantité d'eau contenue dans ce bassin ?

L'eau contenue dans le bassin forme un segment sphérique, dont la hauteur est d'après l'énoncé, égale à $1^{\text{m}},2$. Il faut donc calculer la capacité de ce segment sphérique. Le volume d'un segment sphérique a pour mesure le produit de l'aire du cercle, qui aurait pour rayon la hauteur de ce segment, par le rayon de la sphère diminué du tiers de cette hauteur. On aura pour expression du volume V :

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h \right)$$

L'aire du cercle dont le rayon aurait $1^{\text{m}},2$ pour valeur est :

$$A = \frac{22}{7} \times (1,2)^2$$

ou bien :

$$A = 4^{\text{m}^2},5257$$

Cherchons la valeur de la différence :

$$R - \frac{1}{3} h$$

En remplaçant les lettres par leurs valeurs, on a :

$$R - \frac{1}{3} = 1^{\text{m}},5 - 0^{\text{m}},4 = 1^{\text{m}},1$$

alors le volume cherché sera égal à :

Digitized by Google

$$V = 4^{m.q},5257 \times 1^{m},1 = 4^{m.cub},978270$$

ou :

$$V = 4978^{d.cub},270$$

ou encore :

$$V = 4978^{litres},27.$$

divisant le second nombre par 100, on aura le volume en hectolitres :

$$V = 49^{hect},78^{litres}.$$

De la comparaison des volumes.

Problème 118.

Une poutre, dont la forme est celle d'un parallélipipède rectangle, a $3^{m}9$ de longueur, et son volume équivaut à 240^{dcm}; quel sera le volume d'un morceau de cette poutre long de $2^{m}66$.

Pour résoudre ce problème, il faut comparer deux parallélépipèdes rectangles qui ne diffèrent que par l'une de leurs dimensions. En appliquant donc le théorème :

Deux parallélipipèdes rectangles de même base sont entre eux comme leurs hauteurs. On aura en désignant par x le volume cherché.

$$\frac{x}{240} = \frac{2^{m}6}{3^{m}9}$$

d'où on tire :

$$x = \frac{240 \times 2^{m}6}{3^{m}9}$$

effectuant, on trouve :

$$x = 160^{d.cub}.$$

Problème 119.

Un mur a 20^{m} de long sur $2^{m}5$ de haut, son volume

Digitized by Google

est égal à $40^{m.cub}$; on propose de calculer le volume d'un second mur qui aurait 15^{m} de long sur 3^{m} de haut ?

Ces deux murs peuvent être assimilés à deux parallélipipèdes. Or, on sait, que deux parallélipipèdes rectangles qui ont une dimension commune sont entre eux comme les produits des deux autres.

Si donc on désigne par x le volume cherché, on aura :

$$\frac{x}{40} = \frac{15 \times 3}{20 \times 2,5}$$

ou bien :

$$\frac{x}{40} = \frac{45}{50}$$

d'où on tire :

$$x = \frac{40 \times 45}{60}$$

effectuant, on a :

$$x = 36^{m.cub.}$$

Problème 120.

On donne un parallélipipède rectangle qui a pour dimensions :

$2^{m}4$, longueur ; $1^{m}8$, largeur ; $0^{m}4$ hauteur ;

On propose de calculer la valeur de l'arête d'un cube qui aurait un volume équivalent à celui du parallélipipède proposé ?

Si l'on veut former un cube dont le volume soit égal à celui du parallélipipède proposé dont nous désignerons les dimensions par les lettres A, B, C il faudrait, en appelant x l'arête cherchée, poser l'égalité suivante :

$$x \times x \times x = A \times B \times C$$

ce qui donne :

$$x^3 = A \times B \times C$$

d'où on tire :

$$x = \sqrt[3]{A \times B \times C}$$

Digitized by Google

donc pour trouver la valeur de l'arête de ce cube, il suffit de multiplier entre elles les trois dimensions du parallélipipède rectangle, et d'extraire ensuite la racine cubique du produit. On a donc en remplaçant les lettres par leurs valeurs :

$$x = \sqrt[3]{2,^{m}4 \times 1,^{m}8 \times 0^{m}4}.$$

ou bien :

$$x = \sqrt[3]{1^{m.cub.},728}$$

en extrayant la racine cubique, on trouve pour valeur de l'arête du cube.

$$x = 1^{m}.2.$$

Problème 121.

Le diamètre du soleil vaut à peu près 110 fois celui de la terre ; dans quel rapport sont les volumes de ces deux corps ?

Les rayons de deux sphères étant proportionnels aux diamètres, les cubes des rayons seront évidemment entre eux comme les cubes des diamètres ; les volumes V du soleil et v de la terre sont donc entre eux comme le cube de 110 est au cube de 1. On aura :

$$\frac{V}{v} = \frac{110^3}{1^3}$$

ou bien :

$$\frac{V}{v} = 1331000.$$

Ainsi donc le volume V du soleil vaut 1331000 fois celui de la terre.

Problème 122.

Calculer, à un centimètre cube près, le volume d'un

Digitized by Google

prisme droit dont la base est un hexagone régulier, sachant que le côté de la base est 1m56 et la hauteur 2m45.

Le volume du prisme proposé est égal au produit de sa base par sa hauteur. La surface de l'hexagone régulier dont le côté est $c = 1^m56$ et qui sert de base a pour mesure :

$$\frac{3c^2\sqrt{3}}{2};$$

dont le volume V du prisme est égal à :

$$V = \frac{3c^2 H \sqrt{3}}{2}$$

en remplaçant les lettres par leurs valeurs on a :

$$V = \frac{3\ 1{,}56^2 \cdot 2{,}43\ \sqrt{3}}{2}$$

effectuant, on trouve :

$$V = 15^{m.cub}{,}491^{d.cub}$$

Problème 123

Un prisme droit a pour base un triangle équilatéral ; son volume est égal à 1 mètre cube et sa hauteur égale à 0^m80. Calculer à un centimètre près le côté de sa base ?

Désignons par a le côté du triangle équilatéral qui sert de base au prisme proposé et soit H la hauteur du prisme, on aura pour le volume du prisme :

$$V = \frac{a^2 H.\sqrt{3}}{4}$$

On a, d'après l'énoncé :

$$\frac{a^2 H.\sqrt{3}}{4} \times 0{,}8 = 1$$

Il résulte que :

$$a = \sqrt{\frac{5\sqrt{3}}{3}}$$

en effectuant on

Digitized by Google

trouve :

$$a = 1^{m}.70 .$$

Problème 124.

La surface totale d'un cône droit à base circulaire est égale à 10^{m} carrés et le rayon de sa base égal à $1^{m},2$; calculer, à un centimètre près, l'apothème et la hauteur du cône, puis son volume à moins d'un centimètre cube.

Désignons par S et par V la surface totale et le volume d'un cône droit à base circulaire, dont la hauteur est égale à H, l'apothème à A et le rayon de la base à r ; on aura les relations connues :

$$S = \pi r (A + r)$$

$$H = \sqrt{A^2 - r^2}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$$

Lorsque les quantités S et r sont données, la première des égalités écrites ci-dessus donnent A + r, et par conséquent l'apothème A ; on déduit de la seconde relation la valeur de H puis enfin la valeur de V. D'après l'énoncé, on a :

$$S = 10^{m}.q.$$
$$r = 1^{m},2$$

On trouve alors :

$$A = 1^{m},45$$
$$H = 0^{m},82$$
$$V = 1^{mc},234.$$

+ Problème 125

12 + Sachant que si le rayon d'un cercle augmentait de 0,01, l'aire augmenterait d'un mètre carré, calculer le rayon ?

Digitized by Google

Le premier cercle a pour surface :

$$S = \pi R^2$$

R désignant le rayon du cercle ; le deuxième aurait pour surface :

$$S + 10000^{c.q} = \pi (R+1)^2 = \pi R^2 + 2\pi R + \pi$$

remplaçant dans cette expression par sa valeur :

$$\pi R^2$$

il viendra :

$$\pi R^2 + 2\pi R + \pi R^2 + 10.000$$

ou bien :

$$2\pi R + R = 100000$$

divisant par π il vient :

$$2(R+1) = \frac{100000}{\pi}$$

ou encore :

$$R + \frac{1}{2} = \frac{100000}{2\pi}$$

ou :

$$R = \frac{100000}{2\pi} - \frac{1}{2}$$

En effectuant on trouve :

$$R = 15^{m}.91$$

$$1 = \pi\left(r + \frac{1}{100}\right)^2 - \pi r^2 = \pi\left(r^2 + \frac{2r}{100} + \frac{1}{10000}\right) - \pi r^2$$

$$= \pi \times \frac{201\, r}{10000}$$

$$r = \sqrt{\frac{10000}{201 \times 3.14}} = \sqrt{\frac{10000}{631.14}} = \sqrt{15.8443} = 3.98$$

Problème 126

La surface d'un losange est égale à celle d'un cercle de 10^{m} de rayon. Calculer le coté sachant qu'il est égal à la petite diagonale ?

D'après l'énoncé de la question, on doit avoir l'égalité suivante :

$$\text{Surf. du losange} = \pi R^2$$

ou bien :

$$\text{Surf du losange} = 314^{m.q}.1592.$$

Mais on sait qu'un losange équivaut à deux triangles équilatéraux dont chacun a pour surface :

$$\frac{314.1592}{2} = 157^{m.q},0786.$$

Digitized by Google

La surface S du triangle équilatéral est donnée par la formule :

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

d'où :

$$a^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}}$$

par suite :

$$a = \sqrt{\frac{4S}{\sqrt{3}}} = 19^m,0465$$

---

14 + Problème 127.

Calculer le volume d'un cylindre, sachant que la hauteur est égale à 1m et sa surface totale à celle d'un cercle dont le rayon serait 2m ?

D'après l'énoncé du problème on doit avoir :

$$\text{Surf. totale} = \pi R^2$$

ou bien :

$$\text{Surf. totale} = 12^{m\text{q}},5664$$

Cette surface a pour expression :

$$2\pi R(h+R) = 2\pi R(1+R)$$

d'où on tire :

$$\frac{\text{Surf. tot.}}{2\pi} = R(1+R) = R + R^2$$

d'où :

$$R = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{\text{Surf. tot.}}{2\pi} + \frac{1}{4}}$$

mais :

$$\frac{\text{Surf. tot.}}{2\pi} = R^2 + R = \frac{12,5664}{2 \times 3,1416} = 2$$

donc :

$$R = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2 + \frac{1}{4}}$$

ou

$$R = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2,25}$$

on tire de là :

Digitized by Google

$$R' = 1 \; ; \; R'' = -2$$

Cette dernière valeur ne peut naturellement pas satisfaire aux conditions demandées ; elle doit évidemment être rejetée. Le volume V du cylindre est donné par la formule :

$$V = \pi R^2 h$$

ou :

$$V = 3,1416 \times 1^2 \times 1 = 3^{m.c}.1416.$$

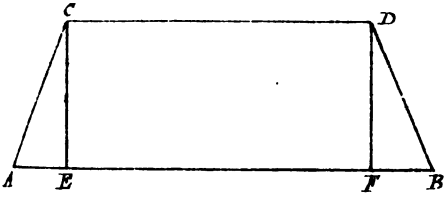
La vérification démontre l'exactitude de ce résultat.

---

75 + Problème 128.

Dans un trapèze isocèle la surface est égale à $8^{m.q}$ 0,0460 ; le périmètre est 12^m,691 et la hauteur est 1,949. Calculer les côtés AB, CD, AC, BD?

Fig. 1



Dans un trapèze la surface est égale à la demi-somme des bases multipliée par la hauteur. En désignant par S cette surface nous aurons donc : (Voir Fig. 1)

$$S = \frac{AB + CD}{2} \cdot AE$$

d'où :

$$AB + CD = \frac{2S}{AE} = 8^m,2816.$$

En retranchant ce nombre du périmètre je trouve la somme des deux côtés égaux.

$$AC + BD = \text{Périm.} - (AB + CD)$$

CE est la moitié de l'excès de la grande base sur la petite base ; CE est égal à :

$$\sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AE}^2} = 1,031$$

Digitized by Google

et :

$$2\,CE = 2,062.$$

On connaît maintenant la somme des deux bases et leur différence, il sera facile d'obtenir ces deux quantités ; on a en effet :

$$CD = \frac{8,2816 + 2,062}{2} = 5,1718.$$

et :

$$AB = \frac{8,2816 - 2062}{2} = 3,1098$$

Ainsi donc :

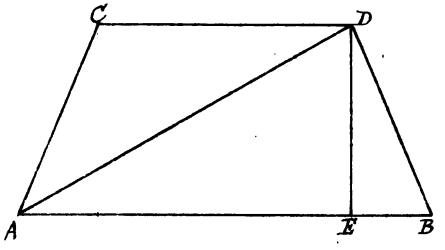
$$AB = 3,1098\ ;\ CD = 5,1718\ ;\ AC = BD = 2,205$$

---

16 + Problème 129

On a un trapèze isocèle ; chacun des deux côtés non parallèles est égal à 203 m. et les bases parallèles sont respectivement égales à 738 m. et 548 m. Calculer les diagonales ?

Fig. 2.



Soit ABCD le trapèze. Cherchons la hauteur DE (Voy. fig. 2) on aura :

$$DE = \sqrt{\overline{DB}^2 - \overline{BE}^2}$$

BE est égal à la moitié de la différence des deux bases. On trouve pour DE :

$$DE = \sqrt{203^2 - 95^2} = 179$$

Connaissant DE, remarquons que la diagonale AD est l'hypoténuse d'un triangle rectangle. On connaît AE, égal à la différence de AB et de EB. On aura donc :

$$AD\sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{DE}^2} = \sqrt{643^2 + 179^2} = 667,557$$

Le trapèze étant isocèle, les deux diagonales sont égales.

Problème 130.

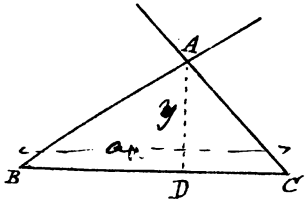
Etant donnée une droite BC d'une longueur connue,

Digitized by Google

sur les extrémités de laquelle deux autres droites BA, CA font des angles donnés ABC, ACB, trouver la hauteur AD du point de concours A, au dessus de la droite donnée BC. (1)

Désignons la droite BC par a et la hauteur cherchée AD par y. L'angle ABD étant donné (Voy. Fig. 3) la table des sinus et des tangentes donnera le rapport entre les lignes AD et BD nous désignons ce rapport par $\frac{d}{e}$.

Fig. 3



On aura :

$$\frac{AD}{BD} = \frac{d}{e}$$

De même à cause de l'angle donné ACD, on aura le rapport entre les droites AD et CD que nous désignerons par $\frac{d}{f}$. On aura donc :

$$\frac{AD}{CD} = \frac{d}{f}$$

Des deux égalités écrites ci-dessus, on tire :

$$BD = \frac{ey}{d} \quad ; \quad DC = \frac{fy}{d}.$$

Mais remarquons que :

$$BC = BD + DC$$

ou bien :

$$BC = \frac{ey}{d} + \frac{fy}{d} = a$$

en chassant le dénominateur, on a :

$$ad = ey + fy = y\,(e+f)$$

d'où :

$$y = \frac{ad}{e+f}$$

Problème 131.

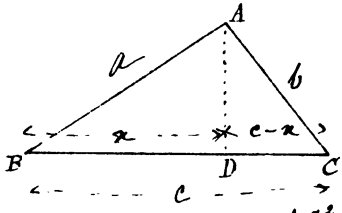
Si les côtés AB, AC et la base BC d'un triangle

(1) Voy. Newton, Arithmetica universalis.

Digitized by Google

quelconque ABC sont donnés et qu'une perpendiculaire AD soit abaissée du sommet de l'angle A sur la base, on demande de trouver les deux segments BD et DC. (1)

Fig. 4



Désignons par a et b les côtés AB et AC (Voy. Fig. 4) par c la base BC et BD par x, par suite :

$$DC = c - x.$$

Maintenant comme :

$$AB^2 - BD^2 = AD^2$$

et que :

$$AC^2 - DC^2 = AD^2$$

On aura en mettant les valeurs analytiques dans chacune des équations que nous venons d'écrire :

$$a^2 - x^2 = AD^2$$

$$b^2 - (c-x)^2 = AD^2$$

par suite :

$$b^2 - (c-x)^2 = a^2 - x^2$$

ou bien :

$$b^2 - c^2 + 2cx - x^2 = a^2 - x^2.$$

d'où l'on déduit, après quelques réductions faciles :

$$x = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}.$$

en retranchant cette valeur de $\underline{c}$ on obtient celle du second segment DC.

Problème 132

17 Étant donnés le périmètre et la surface d'un triangle rectangle ABC, trouver son hypoténuse BC (1)

Désignons le périmètre par a, la surface du

---

(1) Voy. Newton, Arithmetica universalis.

Digitized by Google

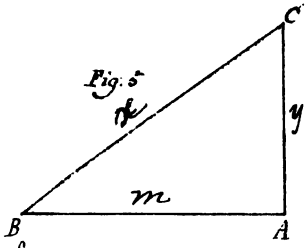


Fig. 5

triangle par b^2 et enfin faisons :

$$BC = x,\ AC = y,$$

on aura pour AB (Voy. Fig. 5)

$$AB = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

Ce qui donne pour valeur du périmètre :

$$BC + AC + AB = x + y + \sqrt{x^2 - y^2}.$$

La surface du triangle est égale à :

$$\frac{1}{2} AC \times AB = \frac{1}{2} y \sqrt{x^2 - y^2}$$

Nous avons donc les deux équations :

$$a = x + y + \sqrt{x^2 - y^2} \text{ et } b^2 = \frac{1}{2} y \sqrt{x^2 - y^2}$$

De la seconde équation on tire :

$$\sqrt{x^2 - y^2} = \frac{2b^2}{y}$$

mettant dans la première cette valeur de $\sqrt{x^2 - y^2}$, il vient :

$$x + y + \frac{2b^2}{y} = a$$

Chassant le dénominateur, on obtiendra :

$$xy + y^2 + 2b^2 = ay.$$

ou bien :

$$y^2 = ay - xy - 2b^2$$

Retranchons maintenant des deux membres de la première équation $x + y$ nous aurons :

$$\sqrt{x^2 - y^2} = a - x - y.$$

Elevons les deux membres de cette équation au carré, nous obtiendrons :

$$x^2 - y^2 = a^2 - 2ax + x^2 - 2ay + 2xy + y^2$$

Ordonnons et divisons par 2, nous aurons :

$$y^2 = ay + ax - xy - \frac{a^2}{2}$$

Egalons cette seconde valeur de y^2 à la première, il viendra :

$$ay + ax - xy - \frac{a^2}{2} = ay - xy - 2b^2$$

Faisant $BA = m$

$$2b^2 = my$$

$$a^2 - 2ax = 4b^2$$

$$x = \frac{-4b^2 + a^2}{2a}$$

$$a = x + y + m$$

$$a - x = y + m$$

$$a^2 - 2ax + x^2 = my + 2my + y^2$$

Digitized by Google

Equation qui se réduit à :

$$ax - \frac{a^2}{2} = -2b^2$$

d'où on tire :

$$x = \frac{a}{2} - \frac{2b^2}{a}$$

Problème 133.

Etant donnés le périmètre et la hauteur d'un triangle rectangle, résoudre ce triangle (1)

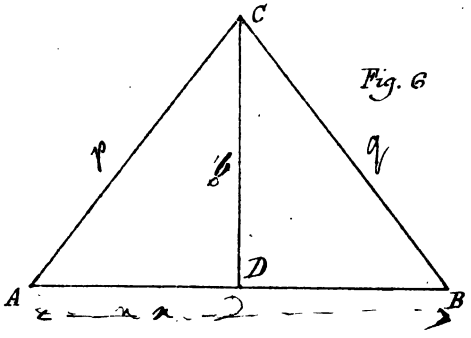


Fig. 6

Soient C l'angle droit du triangle rectangle donné ABC (Voy. Fig. 6) et CD la perpendiculaire abaissée sur la base AB. Désignons le périmètre AB + AC + BC par a, et la perpendiculaire CD par b. Nommons la base AB = x la somme des côtés AC + CB sera par suite égale à :

$$a - x$$

Supposons, en outre :

$$AC - CB = y.$$

Alors, en vertu d'un théorème connu, on aura :

$$AC = \frac{a - x + y}{2}; \quad BC = \frac{a - x - y}{2}.$$

Mais le triangle étant rectangle, on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

c'est à dire :

$$x^2 = \frac{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}{2}$$

Mais à cause de la similitude des triangles rectangles ACB,

---

(1) Voy. Newton, Arithmetica universalis.

Digitized by Google

CBD, on a :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{DC}$$

ou bien :

$$AB \times DC = AC \times BC$$

ce qui donne :

$$bx = \frac{a^2 - 2ax + x^2 - y^2}{4}$$

Mais la première équation donne :

$$y^2 = x^2 + 2ax - a^2$$

la seconde :

$$y^2 = x^2 - 2ax + a^2 - 4bx$$

par suite :

$$x^2 + 2ax - a^2 = x^2 - 2ax + a^2 - 4bx$$

en réduisant on obtient :

$$4ax + 4bx = 2a^2$$

ou :

$$4x(a+b) = 2a^2$$

ou encore

$$2x(a+b) = a^2$$

d'où on tire enfin :

$$x = \frac{a^2}{2(a+b)}$$

$x = a - p - q$
$x - a = -p - q$
$a - x = p + q$
$a^2 - 2ax + x^2 = p^2 + 2pq + q^2$
$a^2 - 2ax = 2xb$
$2ax + 2xb = 2x(a+b) = a^2$
$x = \frac{a^2}{2(a+b)}$

$pq = xb$
$2pq = 2xb$

Problème 134

Etant donnés les côtés AB, BD, DC et AC et une diagonale BC d'un parallélogramme quelconque, trouver l'autre diagonale AD (1)

Désignons par E le point de rencontre des deux diagonales AD, BC, (*Voy. Fig 7*) puis abaissons la perpendiculaire AF sur la diagonale BC et nous aurons en

(1) *Voy. Newton, Arithmetica universalis.*

Digitized by Google

$CB = 2m$ et $AD = 2x$, Autre démonstration

$a^2 + b^2 = 2m^2 + 2x^2$ $\qquad$ $2a^2 + 2b^2 = \overline{CB}^2 + \overline{AD}^2$

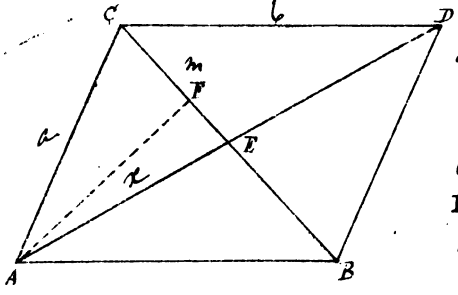
$a^2 + b^2 - 2m^2 = 2x^2$ $\qquad$ $\overline{AD} = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - \overline{CB}^2}$

$4x^2$ or $\overline{AD}^2 = 2a^2 + 2b^2 - 4m^2$

$4m^2 = \overline{CB}^2$

$AD = \sqrt{2a^2 + 2b^2 - \overline{CB}^2}$

Fig. 7.



vertu d'un théorème connu,

$$CF = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{2\,BC}$$

de même :

$$CF = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AE}^2 + \overline{EC}^2}{2\,EC}$$

Or, comme :

$EC = \frac{1}{2}BC$; $AE = \frac{1}{2}AD$

on aura :

$$\frac{\overline{AC}^2 - \frac{1}{4}\overline{AD}^2 + \frac{1}{4}\overline{BC}^2}{BC} = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}{2\,BC}$$

réduisant et résolvant par rapport à AD, il viendra :

$$AD = \sqrt{2\overline{AC}^2 + 2\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}$$

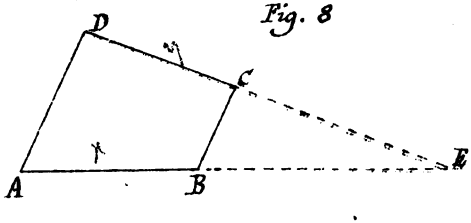
On voit donc que dans un parallélogramme quelconque, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales.

Problème 135

Etant donnés les angles, la surface et le périmètre d'un trapèze ABCD, trouver ses côtés (1)

Soit le trapèze ABCD, prolongeons les deux côtés AB et CD jusqu'à ce qu'ils se rencontrent au point E. (Voy. Fig. 8)

Fig. 8



Désignons AB et BC par x et y ; puisque tous les angles sont, d'après l'énoncé, connus les rapports de BC à CE et à BE.

(1) Voy. Newton, Arithmetica universalis.

Digitized by Google

Supposons qu'ils soient comme ceux de d à e et à f, on aura :

$$CE = \frac{ey}{d} \quad ; \quad BE = \frac{fy}{d} \; ;$$

donc :

$$AE = x + \frac{fy}{d}$$

Pareillement, on connaît encore le rapport de AE et AD et à DE ; supposons qu'ils soient ceux de g à d et à h, et on aura :

$$AD = \frac{dx + fy}{g} \; ; \; ED = \frac{dx + fy}{h}.$$

Ainsi donc :

$$CD = DE - CE = \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}.$$

donc la somme des côtés est égale à

$$x + y + \frac{dx + fy}{g} + \frac{dx + fy}{h} - \frac{ey}{d}.$$

Soit a cette somme. Pour abréger, au lieu de quantités données, $1 + \frac{d}{g} + \frac{d}{h}$ substituons : $\frac{p}{r}$; au lieu de quantités données : $1 + \frac{f}{g} + \frac{f}{h} - \frac{e}{d}$, substituons $\frac{q}{r}$, alors l'équation deviendra :

$$\underline{px + qy} = a$$

De plus, à cause du angle donné, on connaît le rapport de $\overline{BC}^2$ à la surface du triangle, désignons ce rapport par $\frac{m}{n}$. On aura donc :

$$BCE = \frac{ny^2}{m}$$

Désignons aussi le rapport de $\overline{AE}^2$ au triangle ADE par $\frac{m}{d}$, on aura :

$$ADE = \frac{d^2x^2 + 2dfxy + f^2y^2}{dm}$$

Par conséquent, comme la surface AC qui est la différence des surfaces de ces deux triangles, est donnée, nous représenterons par b^2, on aura donc :

$$b^2 = \frac{d^2x^2 + 2dfxy + f^2y^2 - dny^2}{dm}$$

Digitized by Google

Au moyen de ces deux équations nous pouvons tout déterminer. Car si de la première, $a = \frac{px + qy}{r}$ on tire la valeur de x, on aura :

$$x = \frac{ra - qy}{p}$$

Substituant cette valeur dans la seconde ; on aura :

$$\frac{dr^2a^2 - 2dqray + dq^2y^2}{p^2m} + \frac{2afry - 2fqy^2}{pm} + \frac{f^2y^2 - dny^2}{dm} = b^2$$

Mettons pour abréger, S au lieu de la quantité connue :

$$\frac{dq^2}{p^2} - \frac{2fq}{p} - \frac{f^2}{d} - n \text{ ou } - St,$$

au lieu de la quantité connue :

$$\frac{adqr}{p^2} - \frac{afr}{p}$$

et enfin :

$$stv,$$

au lieu de la quantité connue :

$$b^2m - \frac{dr^2a^2}{p^2},$$

on aura :

$$y^2 = 2ty + tv$$

d'où :

$$y = t + \sqrt{t^2 + tv}.$$

Problème 136

Dans un cône le rayon de la base est de 4 m, la hauteur est de 7 m. A une distance du sommet égale à 5 m, on mène un plan parallèle au plan de la base ; On propose de calculer avec 4 chiffres décimaux exacts le volume et la surface latérale du tronc de cône ainsi formé ?

Déterminons d'abord le rayon de la base supérieure nous aurons, en appelant r ce rayon :

$$\frac{r}{4} = \frac{5}{7}$$

d'où :

$$r = \frac{20}{7}$$

Digitized by Google

La hauteur du tronc est égale à 2^m. Par suite le volume V de ce tronc sera égal à :

$$V = \frac{2}{3}\pi\left(16 + \frac{400}{49} + \frac{80}{7}\right) = \pi.2\left(\frac{784 + 400 + 560}{147}\right.$$

où :

$$V = \frac{\pi.3488}{147} = 74^{mc},5438.$$

L'apothème étant donnée par :

$$\sqrt{4 + \left(4 - \frac{20}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{260}{7}}$$

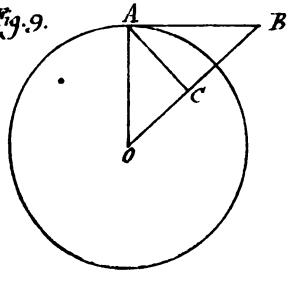
La surface latérale S du tronc de cône sera égale par conséquent à :

$$S = \pi\left(4 + \frac{20}{7}\right).\frac{\sqrt{260}}{7} = \frac{\pi.48\sqrt{260}}{49} = 49^{mq},6228.$$

Problème 137

En un point A d'une circonférence de 3^m de rayon, on mène une tangente sur laquelle on prend une longueur AB égale à 4^m; on joint le centre O à l'extrémité B, et l'on abaisse du point A sur OB la perpendiculaire AC. On demande : 1° La valeur de la projection BC de la tangente AB sur la droite OB, ainsi que celle de la perpendiculaire AC; 2° La valeur de la surface engendrée par la révolution de AB en tournant autour de OB..?

Fig. 9.



Joignons le point A au centre de la circonférence, nous formerons ainsi un triangle rectangle dans lequel nous connaissons :

$$AO = 3^m;\quad AB = 4^m,$$

par suite l'hypoténuse BO sera égale à; (Voy. Fig. 9)

$$BO = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5^m$$

Digitized by Google

D'un autre côté :

$$\frac{BC}{CO} = \frac{16}{9}$$

donc :

$$\frac{BC + CO}{CO} = \frac{25}{9}$$

ou bien :

$$\frac{5}{CO} = \frac{25}{9}$$

donc :

$$CO = \frac{9}{5} \text{ et } BC = \frac{16}{5};$$

de même :

$$\overline{AC}^2 = CO.BC$$

donc :

$$\overline{AC}^2 = \frac{9}{5} \cdot \frac{16}{5}$$

donc :

$$AC = \frac{12}{5}$$

Il suit de là que :

$$BC = \frac{16}{5} \; ; \; AC = \frac{12}{5}$$

La surface engendrée par la longueur AB tournant autour de OB est la surface d'un cône qui a pour base un cercle dont le rayon est égal à :

$$AC = \frac{12}{5}$$

et pour apothème la longueur BA égale à 4^{m}. La surface engendrée aura donc pour expression :

$$S = 2\pi . AC . \frac{BA}{2}$$

où :

$$S = 2\pi . \frac{12}{5} . 4 = \frac{3,1416 . 48}{5}$$

en effectuant, on trouve :

$$S = 30^{mq},1593$$

Problème 138.

On a une circonférence de rayon R ; dans cette

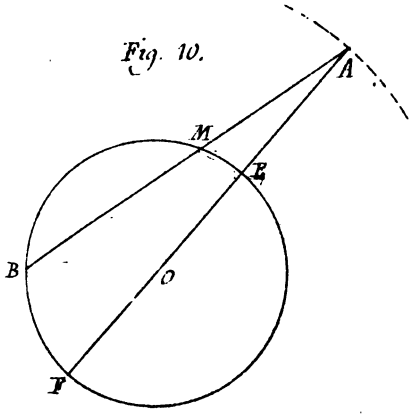
Digitized by Google

circonférence une corde égale à BM; son prolongement passe par le point A; on connaît de plus AO, on propose de calculer MA. Premièrement par une construction graphique, Secondement par une formule algébrique à $0^m.001$ près. On donne :

$$BM = 29^m$$
$$R = 20^m$$
$$OA = 25^m$$

En premier lieu inscrivons dans le cercle de rayon R, une corde égale à BM, et du centre O décrivons un cercle avec OA pour rayon, ce cercle coupera évidemment BM en un point A; on obtiendra par cette construction la ligne AM. (Voy. Fig. 10). En second lieu, si par le point A on mène deux sécantes, on aura toujours :

Fig. 10.



$$\cancel{AB}\ AE.AM = AE.AF$$

Si nous désignons par x la ligne AM, on aura :

$$x(x+29)=(25+20)(25-20$$

ou :

$$x^2+29x-225=0$$

d'où :

$$x=-14,5\pm\sqrt{14,5^2+225}\ ;\ x=6^m,363$$

Problème 139.

Calculer le volume d'une lentille sphérique concave-convexe, sachant qu'on a :

$$OA = OC = 0^m,4$$
$$O'A = O'C = 0^m,5$$

Digitized by Google

$$AE = 0^m 3$$

On évaluera à un centième près.

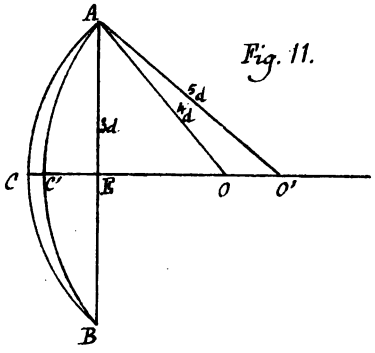


Fig. 11.

Le volume de la lentille ACBC' (Voy. Fig 11) engendré par le triangle rectiligne ACC' tourne autour de l'axe CO.

En considérant le volume engendré par les secteurs ACO, AC'O et par les deux triangles AEO', AEO on voit que :

$$\text{Vol. } ACC' = \text{vol } ACO - \text{vol } AC'D' + \text{vol. } AEO' - \text{vol. } AEO$$

Mais remarquons que :

$$\text{vol } ACO = 32.\frac{\pi}{3}(4-\sqrt{7});$$
$$\text{vol } AC'O' = 50.\frac{\pi}{3};$$
$$\text{vol } AEO' = 36.\frac{\pi}{3};$$
$$\text{vol. } AEO = 9\sqrt{7}.\frac{\pi}{3}$$

En portant ces valeurs dans l'expression du vol. ACC' écrite plus haut, on a, après quelques réductions faciles :

$$\text{vol. } ACC' = \frac{\pi}{3}(114 - 41\sqrt{7})$$

mais :

$$\frac{\pi}{3} = 1,0472$$

donc :

$$\text{vol. } ACC' = 1,0472\,(114 - 41\sqrt{7})$$

en effectuant on trouve enfin :

$$\text{vol. } ACC' = 5^{\text{d. cub}} \doteq 785.$$

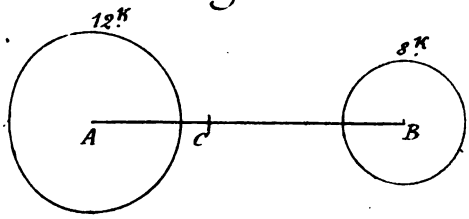
Problème 140

Un corps se compose de deux parties qui pèsent R Kilog.

Digitized by Google

et 8 Kilog. dans les centres de gravité sont aux points A et B ; la distance AB étant égale à 35 cent. On demande à quelle distance des points A et B se trouve le centre de gravité du corps entier ?

Fig. 12.



Lorsque deux forces sont appliquées aux extrémités d'une droite telle que AB, le point d'application de la résultante divise la droite donnée en parties inversement proportionnelles aux intensités de ces forces. Nous considérons les points A et B de la droite AB (Voy Fig 12) comme les points d'application de deux forces dont les intensités respectives sont représentées par les nombres 12 et 8. La résultante passant par le centre de gravité, si l'on désigne par C le point cherché, on aura en posant $AC = x$ (AB étant égale à 0.35 cent.)

$$\frac{x}{35-x} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

d'où :

$$3x = 70 - 2x$$

par suite :

$$x = \frac{70}{5} = 14^{cm}$$

Le centre de gravité cherché est donc à 14 cm. du point A et par suite à :

$$35 - 14 = 21^{cm}.$$

du point B.

Problème 141

La dimension d'une chambre sont : de 5m.20 de longueur, 4m.10 de largeur, 3m.50 de hauteur ; on demande de

Digitized by Google

calculer le prix d'achat de l'étoffe qui doit servir de tenture, sachant que chaque pièce qui coûte 125 f a 20 m de longueur sur 0,75 de largeur ?

Dans ce problème on fait abstraction de la place qu'occupent les croisées ainsi que la cheminée de la chambre ; on aura à déterminer la surface des parois latérales ; en doublant la somme des surfaces de deux parois contiguës, on trouve pour résultat :

$$65^{m}10$$

La surface de la pièce d'étoffe est égale à :

$$20 \times 0,75 = 15^{m}$$

Le nombre de pièces d'étoffe qu'il faudra employer est donc :

$$\frac{65^{m}40}{15} = 4^{m},34.$$

Multipliant 4,24 nombre de pièces d'étoffe par 125 f prix d'une, on obtient pour produit 542 f 50 c prix d'achat.

Problème 142.

On demande 1° de parquetter cette chambre avec des polygones réguliers, dodécagones et triangles, d'un même côté donné ; 2° de calculer le nombre nécessaire de polygones de chaque forme ; 3° Enfin, le prix d'achat de ces polygones, sachant que les premiers coûtent 50 f, et les seconds 20 f le cent ?

1° L'angle d'un dodécagone régulier est égal, comme on le sait, à $\frac{5}{3}^{d}$ et l'angle du triangle latéral à $\frac{2}{3}^{d}$, en désignant donc par x et par y le nombre d'angles de chaque espèce qui sont réunis au même point, on aura alors à résoudre l'équation indéterminée :

$$\frac{5}{3}x + \frac{2}{3}y = 4.$$

on tire de cette équation les valeurs générales :

$$x = 2t \; ; \; y = 6 - 5t$$

Digitized by Google

et par suite :

$$x = 2 \; ; \; y = 1$$

On pourra donc couvrir le parquet avec des dodécagones et des triangles en prenant deux fois plus de la première espèce que de la seconde.

2° Soient S et S' les surfaces du dodécagone et du triangle équilatéral dont le côté commun est représenté par a ; on aura :

$$S = 3a^2(2+\sqrt{3})$$

$$S' = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

Désignons maintenant par S'' la surface du parquet ; par d le nombre de dodécagones et par t le nombre de triangles équilatéraux qui le couvrent, on aura :

$$S'' = dS + tS'$$

mais remarquons que :

$$d = 2t \quad \text{donc} : t = \frac{S''}{2S + S'}$$

3° Enfin. Si l'on suppose que le côté donné soit égal à 0^m1 ; on trouvera pour les surfaces du dodécagone et du triangle équilatéral :

$$S = 0^{m.q}.1119$$

$$S' = 0^{m.q}\ 0043$$

et par suite :

$$S'' = 21^{m.q}.32$$

On tire de là que le nombre t de triangles est égal à :

$$t = 94$$

et le nombre d de dodécagones

$$d = 188$$

par suite on aura pour prix des triangles 19^f et pour les dodécagones, 94^f.

Problème 143

On propose de calculer le poids de l'air contenu dans

Digitized by Google

cette chambre. Sachant que le poids d'un corps s'obtient en multipliant son volume par sa densité et prenant pour densité de l'air rapportée à l'eau $\frac{1}{770} = 0.0013$?

On calculera d'abord la capacité de la chambre en faisant le produit de ses trois dimensions, ce qui donnera pour résultat :

$$74^{m.c.} 620 \text{ ou } 74620$$

ou bien :

$$74620000 \text{ centim. cub.}$$

Or 1cc. d'eau pèse 1 gr. donc le poids de l'eau contenue dans la chambre serait de :

$$74620000 \text{ grammes}$$

Multipliant par la densité de l'air on aura pour le poids P de l'air :

$$P = \frac{74620000}{770}$$

ou :

$$P = 74620000 \times 0,0013 .$$

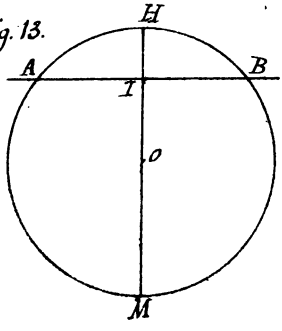
en effectuant, on trouve :

$$P = 97^{K} \text{ environ.}$$

Problème 144.

Une sphère de bois dont la densité est $D = 0,840625$ se trouve dans l'eau : on propose de calculer la flèche de la partie flottante ?

Fig. 13.



Soit AB la surface du liquide (Voy. Fig. 13)

$HI = x$ inconnue que nous cherchons.

$OA = R$

$D =$ densité de la sphère

$d =$ id du liquide.

On sait, en vertu du principe d'Archimède, qu'un corps

plongé dans un liquide y perd une partie de son poids égale au poids du volume du liquide qu'il déplace ; par conséquent le poids de la sphère est égal au poids du volume du liquide déplacé, on aura donc :

$$\text{Segment AMB}.d = \text{vol. sph. AHBM}.D$$

ou :

$$\frac{\text{Segment AMB}}{\text{vol. AHBM}} = \frac{D}{d}$$

d'où l'on tire facilement :

$$\frac{\text{Segment AHB}}{\text{vol sph AHBM}} = \frac{d-D}{d}$$

Or :

$$\text{Segment AHB} = \frac{\pi \overline{IB}^2}{2} . IH + \frac{\pi \overline{IH}^3}{6}$$

$$\text{vol. sph. AHBM} = \frac{\pi \overline{HM}^3}{6} = \frac{\pi \overline{2R}^3}{6}$$

de plus comme :

$$IB^2 = IH.IM = x\,(2R - x)$$

On aura donc l'équation :

$$\frac{\frac{\pi x^2 (2R - x)}{2} + \frac{\pi x^3}{6}}{\frac{\pi . 2R^3}{6}} = \frac{d-D}{d}$$

après quelques réductions faciles on arrive à l'équation :

$$\frac{3.2R.x^2 - 2x^3}{2R^3} = \frac{d-D}{d}$$

posons :

$$\frac{x}{2R} = y \quad \text{et} \quad \frac{D}{d} = 1'$$

il viendra :

$$y^2 (3 - 2y) = 1 - 1'$$

Telle est l'équation qui déterminera le rapport de la flèche au diamètre de la sphère immergée.

D'après l'énoncé du problème on a :

$$d = 1 \;;\; D = 0{,}840625 = \frac{840625}{1000000} = \frac{27}{32} = 1'$$

Digitized by Google

d'où :

$$1 - 1' = \frac{5}{32}$$

l'équation à laquelle nous sommes arrivés deviendra donc :

$$2y^3 - 3y^2 + \frac{5}{32} = 0$$

Si l'on fait :

$$y = \frac{z}{4}$$

On obtiendra :

$$z^3 - 6z^2 + 5 = 0$$

Cette équation est satisfaite pour :

$$z = 1$$

par suite :

$$y = \frac{1}{4} ; \quad x = \frac{1}{4} . 2R$$

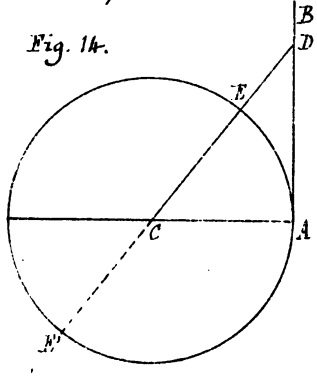
la sphère sera donc immergée aux trois quarts.

Problèmes divers sur l'évaluation des longueurs, surfaces et volumes.

Problème 145

On demande de déterminer sur la tangente AB menée en un point A d'un cercle dont le centre est C, un point D tel que la partie DE comprise entre ce point et la circonférence sur la droite menée du point D au centre, soit la moitié de AD.

Fig. 14.



Le triangle rectangle en A nous donnera : (Voy. Fig. 14)

$$\overline{AD}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{AC}^2$$

ou bien :

$$\overline{AD}^2 = (CE + ED)^2 - \overline{AC}^2 =$$

$$= (AC + \frac{AD}{2})^2 - \overline{AC}^2$$

$$\overline{AD}^2 = AD.AC + \frac{\overline{AD}^2}{4}$$

par suite :

$$AD = AC + \frac{AD}{4}$$

Digitized by Google

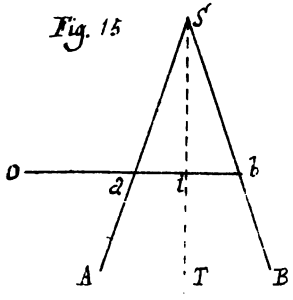
d'où :

$$AD = \frac{4}{3} AC$$

Problème 146

Etant donné un angle ASB, on demande de mener par un point O une droite qui retranche des côtés de l'angle, à partir du sommet deux segments égaux Sa et Sb.

Fig. 15



Soit ASB l'angle donné. (Voy Fig. 15)

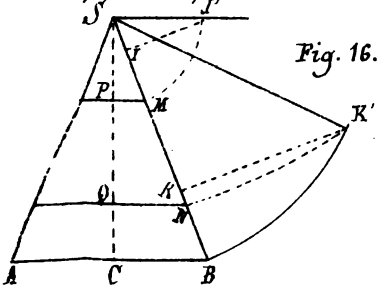
Menons du point S, la droite SI bissectrice de l'angle ASB puis du point O abaissons la perpendiculaire sur la droite SI, prolongeons cette perpendiculaire sur cette ligne il est clair que les deux triangles SIa et SIb sont égaux, donc :

$$Sa = Sb.$$

Problème 147.

Etant donnée la hauteur d'un cône la partager en trois parties de façon que les plans parallèles à la base, menés par les points de division, partagent la surface latérale du cône en trois parties équivalentes ?

Fig. 16.



Désignons par ASB le cône. La surface latérale d'un cône est équivalente à celle d'un triangle qui aurait pour base $2\pi R$ et pour hauteur l'apothème. Le problème énoncé plus haut

Digitized by Google

revient donc à celui-ci.

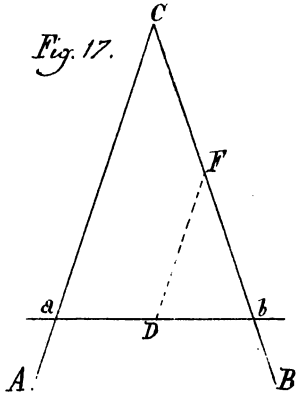
Partager le triangle ASB en trois parties équivalentes par des droites menées parallèlement à la droite AB (Voy. Fig. 16).

Des points I et K pris à $\frac{1}{3}$ et à $\frac{2}{3}$ de AB, menons des perpendiculaires à SB jusqu'à la rencontre du demi-cercle décrit du point S puis rabattons les points I' et K' en M et N. Les plans menés par les points M et N parallèlement à la base résoudront la question.

Problème 148.

Par un point D donné dans un angle ACB mener une droite ab comprise entre les deux côtés de l'angle de manière que le point D soit le milieu de cette droite ?

Fig. 17.



Du point D (Voy. Fig. 17) menons la droite DF parallèle au côté AC ; prenons ensuite :

$$Fb = CF$$

Joignons bD et prolongeons jusqu'en a. On aura évidemment :

$$\frac{ab}{Db} = \frac{Cb}{Fb} = 2$$

Ce qui donne :

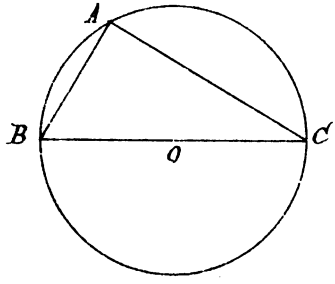
$$ab = 2Db.$$

Problème 149.

Démontrer que le milieu de l'hypoténuse d'un triangle rectangle est à égale distance des trois sommets.

Digitized by Google

Fig. 18

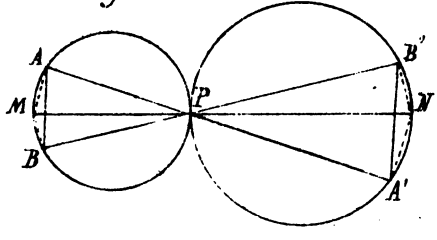


L'angle A étant droit (Voy. Fig. 18) la circonférence décrite sur BC comme diamètre passe par ce point, et dès lors les lignes OB, OC et OA sont trois rayons, donc le milieu de l'hypoténuse BC en est le centre et se trouve par conséquent à égale distance des trois points A, B et C du triangle rectangle.

Problème 150.

Quand deux cercles se touchent en un point P, si par ce point on mène deux droites qui rencontrent un des cercles en A et B et l'autre en A', B', on demande de prouver que la corde AB est parallèle à la corde A'B'.

Fig. 19.



Menons la ligne des centres MN puis joignons BM et B'N. Les deux triangles rectangles PMB et PNB (Voy. Fig. 19) sont semblables, puisque les angles en P point de contact des deux cercles sont opposés par le sommet. On aura donc :

$$\frac{PB}{PB'} = \frac{PM}{PN}$$

Joignons ensuite :

NA et MA

nous aurons de même :

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB}{PB'}$$

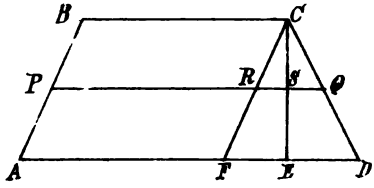
Digitized by Google

Donc les triangles PAB, PA'B' sont semblables comme ayant un angle égal compris entre des côtés proportionnels, les cordes AB et A'B' sont parallèles.

Problème 151.

Étant donné un trapèze ABCD on demande de construire la droite PQ parallèle aux bases et qui partage la surface du trapèze en deux parties ayant entre elles le rapport de 2 à 3?

Fig. 20



Représentons :

AD = par a

BC = b

CE = h

PQ = x CS = y.

D'après l'énoncé du problème on doit avoir :

(Voy. Fig. 20)

$$\frac{\text{Surf PBCQ}}{\text{Surf APQD}} = \frac{2}{3}$$

ou :

$$\frac{\text{Surf. ABCD}}{\text{Surf. PBCQ}} = \frac{5}{2}$$

ou encore :

$$\frac{(a+b)h}{(y+b)y} = \frac{5}{2}$$

on tire de là :

$$[1] \quad 5y(x+b) = 2h(a+b)$$

La considération des triangles CRQ et CFD donnent :

$$\frac{y}{h} = \frac{x-b}{a-b}$$

d'où on tire :

$$y = \frac{h(x-b)}{a-b}$$

Digitized by Google

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

portant cette valeur l'équation [1] on a :

$$5h.\frac{(x+b)(x-b)}{a-b} = 2h(a+b)$$

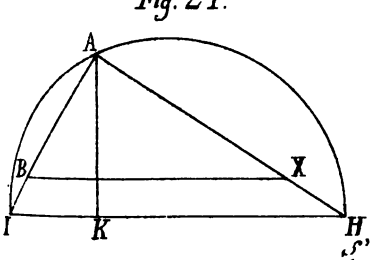
On tire de là :

$$x = \pm\sqrt{\frac{2a^2+3b^2}{5}}$$

Problème 152.

Construire un triangle semblable à un triangle donné ABC et dont la surface soit à celle du triangle ABC comme une longueur donnée M est à une autre longueur donnée N.

Fig. 21.



Désignons par a un côté du triangle ABC et soit x le côté homologue du triangle donné. Comme les deux triangles doivent être semblables, en désignant par S et S' on aura :

$$\frac{S'}{S} = \frac{x^2}{a^2}$$

Mais l'énoncé du problème exige que l'on ait :

$$\frac{S'}{S} = \frac{M}{N}$$

Par suite :

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{M}{N}$$

La question proposée est alors ramenée à construire un carré qui soit à un carré donné dans le rapport $\frac{M}{N}$.

A cet effet on portera sur la même droite et à la suite l'une de l'autre les longueurs IK et KH respectivement égales à N et à M (Voy. fig. 21) Puis on décrira sur IH comme diamètre une demi-circonférence au point K on élèvera une perpendiculaire AK au diamètre, puis on joindra le point A aux points I et H extrémités du diamètre. Sur AI on prendra AB = a et par le point B on mènera la droite BX parallèle au

Digitized by Google

diamètre IH, AX sera évidemment le côté homologue x de a, puisque :

$$\frac{AI}{AH} = \frac{AB}{AX}$$

Par suite :

$$\frac{\overline{AI}^2}{\overline{AH}^2} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AX}^2} = \frac{a^2}{x^2}$$

Mais le triangle BAX est rectangle, donc :

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AX}^2} = \frac{BD}{DX} = \frac{IK}{KH} = \frac{N}{M}$$ en prenant on doit avoir :

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{N}{M}$$

On aura

$$x = AX.$$

Il ne reste donc plus qu'à construire sur AX un triangle semblable au triangle donné.

Problème 153.

Soit S un angle solide formé par les faces rectangulaires ASB, ASC et BSC prenez sur les côtés de cet angle solide les distances $SA = a$; $SB = b$; et $SC = c$; puis faites passer un plan par les trois points A, B, C. On forme ainsi une pyramide triangulaire dont on propose de trouver le volume.

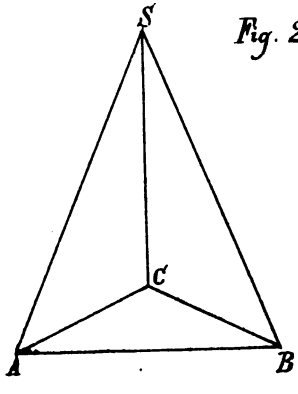


Fig. 22

Prenons ASB (voy. fig. 22) pour base de la pyramide ; les cotés SA et SB sont perpendiculaires, le triangle ASB aura donc pour mesure

$$\frac{ab}{2}$$

Et le côté SC étant perpendiculaire à la base ASB de la pyramide ; il

Digitized by Google

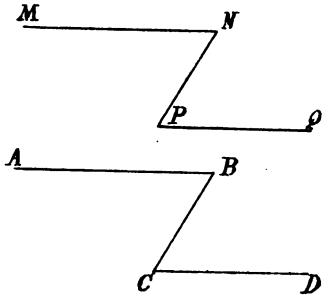
on aura donc la hauteur. Le volume d'une pyramide triangulaire ayant pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur on aura donc en désignant par V le volume cherché :

$$V = \frac{ab}{2} \times \frac{c}{3} = \frac{abc}{6}$$

Problème 154.

Soit AB, BC, CD une suite de droites situées dans le même plan, on prend un point M hors de ce plan, puis on mène MN parallèle à AB, NP parallèle à BC et enfin PQ parallèle à CD; on propose de démontrer que les droites MN, NP et PQ sont dans le même plan, lequel est parallèle au plan ABCD

Fig. 23



On sait que les intersections de deux plans parallèles par un troisième plan sont parallèles, et que par un point donné on ne peut mener qu'une parallèle à une droite. Ceci étant posé, par la droite MN menons un plan parallèle au plan ABCD (voy. fig. 23). Je dis que ce plan contiendra NP sans quoi menant par NP et par sa parallèle BC un plan, l'intersection de ce plan et des deux plans parallèles serait une parallèle à BC différente de NP. On pourrait donc mener deux droites parallèles à la droite BC par le point N ce qui est impossible. On prouverait de même que la droite PQ est dans le même plan mené par les droites MN et NP parallèle au plan ABC.

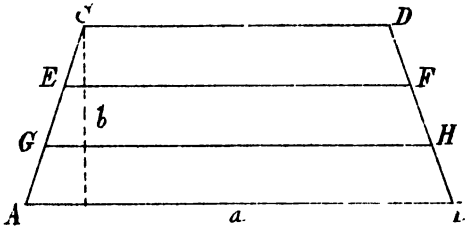
Problème 155

Digitized by Google

Problème 155.

Un trapèze est donné dans lequel les deux bases parallèles et la hauteur sont représentées par a, b, h, on divise les côtés en trois parties égales par des parallèles aux bases, ce qui partage le trapèze donné en trois trapèzes partiels. On propose de trouver la surface de chacun de ces trapèzes exprimée au moyen de a, b et h.

Fig. 24



Supposons qu'on prolonge les deux côtés non parallèles du trapèze donné, on obtiendra un triangle et en abaissant de son sommet une perpendiculaire et désignant par x la portion de cette perpendiculaire (voy. fig. 24) comprise entre le sommet et la plus petite base b du trapèze nous aurons par la comparaison du triangle total et du triangle qui a pour base b:

$$[1] \quad \frac{x+h}{x} = \frac{a}{b}$$

D'où :

$$x = \frac{bh}{a-b}$$

Comparons aussi le triangle qui a pour base la parallèle la plus rapprochée de la base b, parallèle que nous désignerons par b' au triangle total nous aurons :

$$[2] \quad \frac{x+h}{x+\frac{h}{3}} = \frac{a}{b'}$$

D'où :

$$b' = \frac{a\left(x+\frac{h}{3}\right)}{x+h} = \frac{2b+a}{3}$$

par la substitution de la valeur de x tirée de l'équation [1]. Appelons a' la parallèle la plus rapprochée de la base a. Le triangle total

Digitized by Google

et le triangle qui a pour base a', étant aussi semblables, nous donnerons :

$$\frac{x+h}{x+\frac{2}{3}h} = \frac{a}{a'}$$

d'où :

$$a' = \frac{b+2a}{3}$$

Le premier trapèze partiel aura donc pour mesure :

$$\left(\frac{2b+a}{3}+b\right)\frac{h}{3} = (5b+a)\frac{h}{18}$$

Le second :

$$\left(\frac{2b+a}{3}+\frac{b+2a}{3}\right)\frac{h}{6} = (a+b)\frac{h}{6}$$

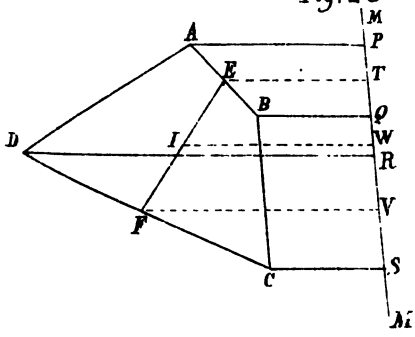
le troisième :

$$\left(\frac{b+2a}{3}+a\right)\frac{h}{6} = b+5a)\frac{h}{18}$$

Problème 156.

On a un quadrilatère et on connaît les distances de ses quatre sommets à un axe donné dans son plan. On joint les milieux des deux côtés opposés par une droite nommée médiane à l'axe est la moyenne arithmétique entre les quatre distances connues des sommets.

Fig. 25



La distance du point E milieu du côté AB (voy. fig. 25) à l'axe est la demi-somme des distances AP et BQ des points A et B, de même la distance du point F, milieu de CD à l'axe est la demi-somme des distances CS, DR des points C et D. La distance du point I, milieu de la médiane EF est la demi-somme des distances des points E et F et par conséquent le quart de la somme des distances des

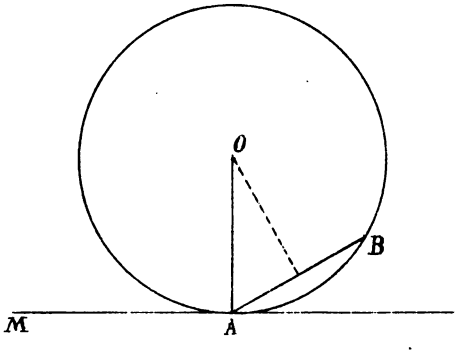
Digitized by Google

quatre points ABCD. Connecter du quadrilatère à l'arc MN donné dans son plan. Ce qu'il fallait démontrer.

Problème 157.

Tracer un cercle tangent en un point déterminé, pris sur une droite donnée et passant par un autre point en dehors de la droite.

Fig. 26



Au point A donné sur la droite, élevons une perpendiculaire à cette droite, elle passera évidemment par le centre du cercle, puisque le cercle doit être tangent à cette droite en ce point.

En joignant le point A au point donné B (voy. fig. 26) on aura une corde du cercle et la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette corde passera par le centre du cercle, qui sera déterminé par la rencontre de ces deux perpendiculaires.

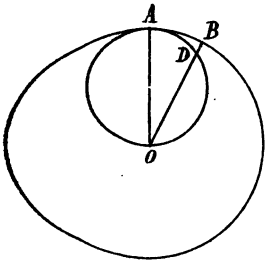
Problème 158.

Étant donnée une circonférence qui a pour rayon OA, et une autre circonférence dont le diamètre est AD connaissant dans ces circonférences que les arcs AD et AB sont égaux; démontrer que O, D, B sont sur la même ligne droite.

L'angle AOB a pour mesure:

Digitized by Google

Fig. 27



$\frac{AB}{AO}$

et l'angle AOD (voy. fig. 27) ce une angle inscrit a pour mesure :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{AD}{\frac{1}{2}CA}\right) = \frac{AD}{AO}$$

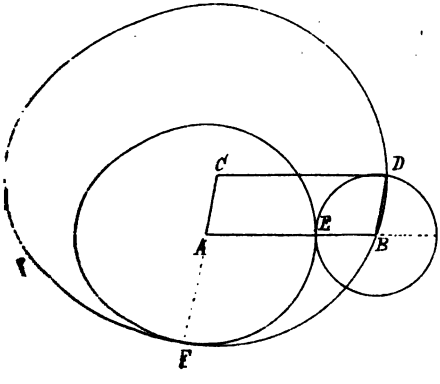
Mais : AB = AD par hypothèse, les deux angles AOB, AOD sont donc égaux comme ayant la même mesure ; la droite OD coïncide donc avec OB, et par conséquent les 3 points O, D, B sont sur la même ligne droite.

Problème 159.

La figure ABCD étant un parallélogramme, on décrit trois circonférences, dont deux passent par le point D et ont leurs centres en B et C. La troisième a son centre en A et touche les deux autres en E et F. Démontrer l'égalité.

arc EF = arc ED + arc DF, les trois arcs étant supposés rectifiés.

Fig. 28



Prolongeons AB d'une quantité égale BD (voy fig. 28.) On obtiendra le point E qui se trouve sur la circonférence décrite du point B avec BD = BE pour rayon ; de même en prolongeant AC de : CF = CD, nous déterminerons le point F qui appartient à la circonférence décrite du point C

Digitized by Google

avec le rayon $CD = CF$. Les deux lignes AE et AF sont égales; donc le cercle décrit du point A comme centre avec AF pour rayon, touchera les deux circonférences qui ont leurs centres en B et C aux points E et F. L'angle A, a pour mesure l'arc :

$$\frac{EF}{AB + AC}$$

L'angle FCD, qui lui est égal, a aussi pour mesure :

$$\frac{FD}{CD} \quad \text{ou} \quad \frac{FD}{AB} ;$$

De même l'angle DBE qui est l'égal de A, aussi pour mesure :

$$\frac{DE}{AC}$$

Il viendra donc :

$$EF = A.(AB + AC)$$
$$DE = A.AB$$
$$DE = A.AC$$

Donc :

$$FD + DE = A.(AB + AC) = EF.$$

Problème 160.

Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme, le point O est sur le prolongement de AD et les trois points M, N, O sont en ligne droite. On suppose que les angles du parallélogramme venant à changer, tandis que les longueurs de ces côtés restent les mêmes, et que les points A et D sont fixes, le quadrilatère prenne la position $AB'C'D$. Démontrer que si les distances AM', DN' sont respectivement égales à AM et DN les trois points M', N', O sont encore en ligne droite et les deux rapports :

$$\frac{MO}{NO}, \frac{M'O}{N'O}$$ sont égaux.

Digitized by Google

Dire si cette proposition subsisterait dans le cas où la droite ODA tournerait autour de O, en prenant une position telle que ODA en entraînant le parallélogramme articulé.

Les deux triangles AMO et DNO sont semblables et nous donnent la suite des rapports égaux :

$$\frac{AM}{DN} = \frac{MO}{NO} = \frac{AO}{DC}$$

Lorsque le parallélogramme ABCD prend la position AB'C'D, les deux triangles AM'O et DN'O ont les angles M'AO, N'DO égaux compris entre des côtés proportionnels ; par conséquent, ils sont semblables et les angles M'OA N'OD sont égaux ; les trois points M', N', O sont donc en ligne droite et le rapport $\frac{M'O}{N'O}$ égalant $\frac{AO}{OD}$, égale le rapport :

$$\frac{MO}{NO}.$$

La proposition subsiste encore dans le cas où la figure tourne autour du point O, en entraînant le parallélogramme articulé, puisque dans cette hypothèse les distances des points A et O au point O n'ont pas changé. La question énoncée plus haut est donc entièrement résolue.

Problème 161.

Comment divise-t-on une droite AB en trois parties proportionnelles aux nombres 2, $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2}$?

Les trois parties de la droite sont entre elles comme 2, $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{2}$ ou comme les nombres 8, 3, 2. La somme $8+3+2=13$, il faut donc diviser la droite donnée en 13 parties égales.

La première division de la droite contiendra :

8 parties

La deuxième : 3

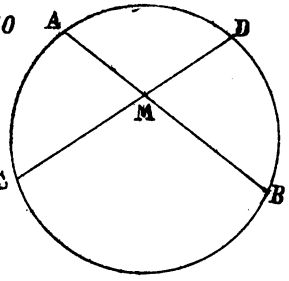
Et enfin la troisième : 2

Digitized by Google

Problème 162

Deux cordes AB et CD se coupent au point M; on connaît AM = 2m56; BM = 3m60; CD = 8m64. On propose de calculer CM et MD?

Fig 30



D'après une proposition de géométrie bien connue on a: (Voy. Fig. 30)

$$CM \cdot MD = AM \cdot MB$$

En second lieu:

$$CD = CM + MD.$$

Il est évident alors que CM et MD sont les deux racines de l'équation du second degré.

$$x^2 - CD.x + AM.AB = 0$$

en remplaçant les lettres par leurs valeurs, on a:

$$x^2 - 8.64\ x + 9.216 = 0$$

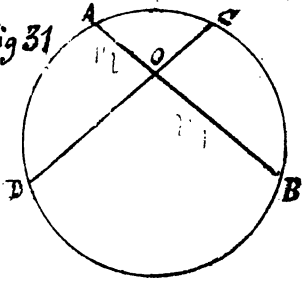
de cette équation on tire très facilement:

$$CM = 7^m39\ ;\ MD = 1^m26.$$

Problème 163.

Deux cordes AB et CD se coupent en un point O, les deux parties OA et OB de la première sont respectivement égales à 1m2 et à 2m1; la différence des deux parties OC et OD est 1m84; on demande quelle est la longueur de cette corde?

Fig 31



On aura encore comme dans dans la question précédente (Voy. Fig. 31)

$$OA \cdot OB = OC \cdot OD$$

Mais:

$$OD - OC = 1.84$$

On déduit de là:

Digitized by Google

$$\overline{OC}^2 + 1.84 . OC - 2.52 = 0$$

D'où on tire :

$$OC = 2^m 754 \text{ par suite } OD = 3^m 834$$

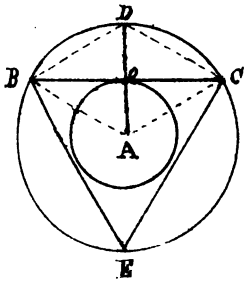
Et enfin :

$$OC + OD = 6^m 588.$$

Problème 164.

Le rayon d'un cercle inscrit, dans un triangle équilatéral est égal à $1^m 25$; on demande la longueur du rayon du cercle circonscrit au même triangle.?

Fig. 32



Désignons par $OA = 1^m 25$ le rayon du cercle inscrit dans le triangle (Voy. Fig. 32) il est évident que d'après l'énoncé du problème, le rayon du cercle circonscrit au triangle équilatéral est de :

$$OD = 2 . OA$$

où :

$$2\ OA = 2 . 1^m 25 = 2^m 50$$

Donc :

$$AD = AO + OD = 2^m 50.$$

Problème 165

Dans un triangle ABC on a :

$$AB = 125^m 215$$

$$AC = 100^m 385$$

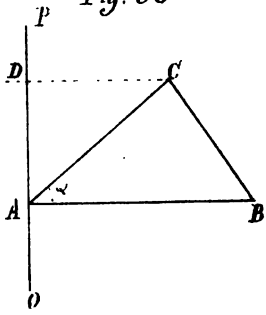
$$A = 39° 45' 53''$$

On propose de calculer le volume qu'engendre le triangle en tournant autour de la ligne PQ menée par le sommet A perpendiculaire au côté AB.

Donnée :

Digitized by Google

Fig. 33



Données.

$AB = 125^m.25$

$AC = 100.382$

$A = 39^\circ\ 45'53''$

Dans le triangle ADC on a

$AD = AC \sin.\alpha$;

$CD\ AC \cos.\alpha$

Le volume demandé, comme on peut le voir (Voy. fig. 33) est égal au volume du tronc de cône engendré par le trapèze ABCD diminué du volume du cône engendré par le triangle ACD.

Ainsi :

Volume du tronc du cône $= \frac{1}{3}\pi AD(\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + AB.CD)$

Volume du cône $= \frac{1}{3}\pi AD.\overline{CD}^2$.

Donc le volume demandé est, en le désignant par V :

$$V = \frac{1}{3}\pi AD\,(\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + AB.CD - \overline{CD}^2)$$

Ou bien :

$$V = \frac{1}{3}\pi AC \sin.\alpha.25340^m.84 = 1703933^{mc}.725.$$

Telle est la valeur du volume cherché.

Problème 166.

Un hexagone régulier dont le côté est pris pour unité tourne autour d'un de ses côtés : On demande de calculer le volume engendré.

Le volume engendré par l'hexagone régulier ABCDEF (Voy. Fig 34) est égal au volume du cylindre engendré par le parallélogramme ABDE plus deux fois le volume du tronc de cône engendré par le trapèze BCnD diminué de deux fois le volume du cône engendré par le triangle CnD.

Digitized by Google

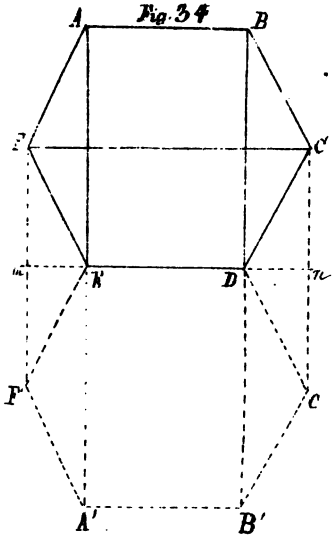


Fig. 34

On aura donc :

Vol. cylind. $ABDE = \pi \overline{BD}^2 . DE +$

$+ 2$ f. vol. tronc. cône $BCnD = \frac{2}{3}\pi Dn$

$\times (\overline{BD}^2 + \overline{Cn}^2 + BD . Cn) -$

$- 2$ f. vol. cône $CnD = \frac{2}{3}\pi \overline{Cn}^2 Dn$

Il faut déterminer maintenant BD, Dn, Cn en fonction du côté C de l'hexagone :

BD est le côté du triangle équilatéral inscrit.

On a donc :

$BD = C\sqrt{3}$, $Dn = \frac{DE}{2} = \frac{C}{2}$; $Cn = \frac{BD}{2} = \frac{C}{2}\sqrt{3}$

En remplaçant BD, Dn et Cn par leurs valeurs respectives, on trouvera :

Vol. cylind. $ABDE = 3\pi C^3$

2 f. vol. tronc de cône $BCnD = \frac{7\pi C^3}{4}$

2 f. vol cône $CnD = \frac{\pi C^3}{4}$

Par suite le volume cherché V sera :

$$V = 3\pi C^3 + \frac{7\pi C^3}{4} - \frac{\pi C^3}{4} = \frac{18\pi C^3}{4} = \frac{9\pi C^3}{2}$$

Mais d'après l'énoncé $C = 1^m$

Donc :

$$V = \frac{9\pi}{2} = 14^{mc}\,137.$$

Problème 167.

Dans le triangle rectangle AOB on a le côté : $AO = 9^m$ le côté $BO = 1^m5$; par le milieu C du côté AO on mène CD parallèle à BO. On propose de calculer la surface latérale du tronc de cône engendré par le trapèze $BOCD$ tournant autour de AO.

Dans le triangle AOB on a : (Voy. fig. 35)

$$CD = \frac{BO}{2} = \frac{1^m5}{2} = 0^m75$$

$$BD = \sqrt{CD^2 + \left(\frac{BO}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + 0{,}75^2} = 1^m25$$

Digitized by Google

[illegible] la moitié latérale du trone
[illegible] comprise par le trapèze
Fig. 15 BIIB on :

$S = \frac{h}{2}(BC + CD + BD) = \frac{h}{2}(BC + CD + BD)$

D — C

[illegible] les lettres par leurs valeurs [illegible] :

$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot (2 \cdot 5 + 5 + 2 \cdot 5) = \frac{5}{2} \cdot (225 + 125) = 3.1416.$

$225 + 125$

[illegible] on a [illegible] :

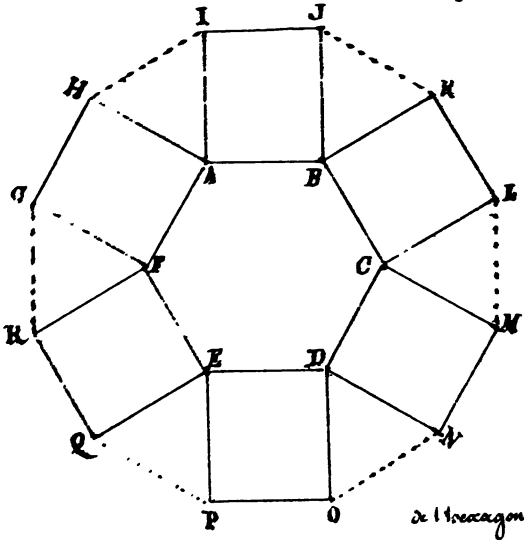
B — 5 — C

$S = 5 \cdot 350 = 1750$

Problème 165.

On a un hexagone régulier dont le coté est égal à 1m sur chacun des cotés AB BC CD etc, on construit un carré extérieur à l'hexagone. Cela posé, on demande :

1° De démontrer que les sommets extérieurs à l'hexagone des six carrés, dont il vient d'être question, forment un polygone régulier de 12 cotés ; 2° de calculer la surface de ce polygone régulier.



Les quatre angles formés autour des sommets de l'hexagone, valent quatre angles droits ; deux de ces angles sont droits, l'angle de l'hexagone vaut $\frac{4}{3}$ d'angle droit, le quatrième vaut donc :

$\frac{2}{3}$ d'angle droit. Le triangle formé en joignant deux sommets consécutifs des carrés construits sur les côtés de l'hexagone est donc équilatéral (Voy. Fig.

Digitized by Google

36); donc, chaque de ses côtés égale le côté des carrés. On a donc un polygone de douze côtés égaux; en outre, chacun des angles de ce polygone égale un angle d'axe plus les $\frac{2}{3}$ d'angle droit, ils sont par suite tous égaux entre eux. Le polygone est par conséquent régulier puisque ses angles et ses côtés sont égaux.

2° La surface de ce polygone régulier se compose de six carrés ayant chacun un mètre de côté, plus de douze triangles équilatéraux ayant pour côté un mètre. Or un triangle équilatéral dont le côté est a, a pour mesure :

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Or donc en désignant par S' la surface du polygone de douze côtés.

$$S' = 6 + 12\frac{\sqrt{3}}{4} = 6 + 3\sqrt{3} = 11^{m.q}1961$$

Problème 169

Le rayon d'un cercle étant désigné par R, on veut avoir les formules qui expriment le côté et la surface de l'octogone régulier inscrit, on supposera ensuite que c'est le côté de l'octogone qui est donné et représenté par a; il faut exprimer au moyen de ce côté la surface de l'octogone?

Le côté du carré inscrit est, comme on sait, égal à $R\sqrt{2}$ et son apothème à $\frac{1}{2}R\sqrt{2}$. Le côté de l'octogone est une moyenne proportionnelle entre le diamètre $2R$ et $R - \frac{1}{2}R\sqrt{2}$ et si on le désigne par x on aura :

$$x^2 = 2R\left(R - \frac{1}{2}R\sqrt{2}\right) = R^2(2 - \sqrt{2})$$

D'où :

$$[1] \quad x = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Pour calculer l'apothème de l'octogone, on aura alors :

Digitized by Google

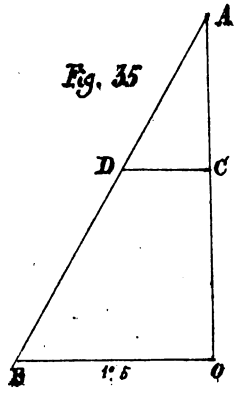


Fig. 35

La surface latérale du tronc de cône engendré par le trapèze BOCD est :

$S = (\pi BO + \pi . CD) BD = \pi (BO + CD) BD$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs il vient :

$S = \pi (1.5 + 0.75)\ 1.25 = \pi\ 2.25 . 1.25 = 3.1416 . 2.25 . 1.25$

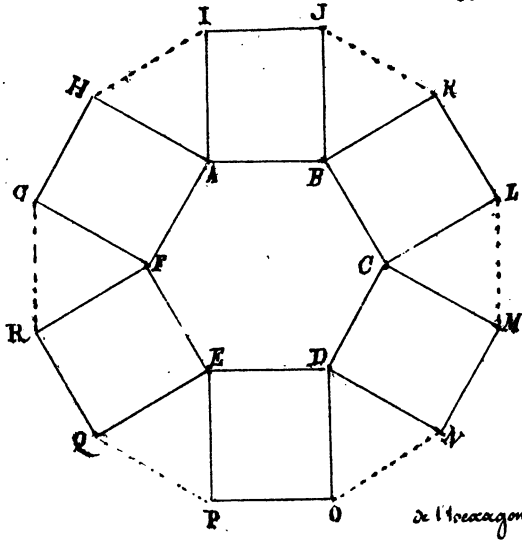
D'où en effectuant :

$S = 8^{mq}\ 83575$

Problème 168.

On a un hexagone régulier dont le coté est égal à 1m; sur chacun des cotés AB, BC, CD etc, on construit un carré extérieur à l'hexagone. Cela posé, on demande :

1° De démontrer que les sommets extérieurs à l'hexagone des six carrés, dont il vient d'être question, forment un polygone régulier de 12 côtés; 2° de calculer la surface de ce polygone régulier.



Les quatre angles formés autour des sommets de l'hexagone, valent quatre angles droits; deux de ces angles sont droits, l'angle de l'hexagone vaut $\frac{4}{3}$ d'angle droit, le quatrième vaut donc :

$\frac{2}{3}$ d'angle droit. Le triangle formé en joignant deux sommets consécutifs des carrés construits sur les côtés de de l'hexagone est donc équilatéral (Voy. fig.

36); donc, chaque de ses côtés égale le côté des carrés. On a donc un polygone de douze côtés égaux; en outre, chacun des angles de ce polygone égale un angle d'axe plus les $\frac{2}{3}$ d'angle droit, ils sont par suite tous égaux entre eux. Le polygone est par conséquent régulier puisque ses angles et ses côtés sont égaux.

2° La surface de ce polygone régulier se compose de six carrés ayant chacun un mètre de côté, plus de douze triangles équilatéraux ayant pour côté un mètre. Or un triangle équilatéral dont le côté est a, a pour mesure :

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

On donc en désignant par S' la surface du polygone de douze côtés.

$$S' = 6 + 12\frac{\sqrt{3}}{4} = 6 + 3\sqrt{3} = 11^{m.q}1961$$

Problème 169

Le rayon d'un cercle étant désigné par R, on veut avoir les formules qui expriment le côté et la surface de l'octogone régulier inscrit, on supposera ensuite que c'est le côté de l'octogone qui est donné et représenté par a; il faut exprimer au moyen de ce côté la surface de l'octogone?

Le côté du carré inscrit est, comme on sait, égal à $R\sqrt{2}$ et son apothème à $\frac{1}{2}R\sqrt{2}$. Le côté de l'octogone est une moyenne proportionnelle entre le diamètre $2R$ et $R - \frac{1}{2}R\sqrt{2}$ et si on le désigne par x on aura :

$$x^2 = 2R\left(R - \frac{1}{2}R\sqrt{2}\right) = R^2(2 - \sqrt{2})$$

D'où :

$$[1] \quad x = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

Pour calculer l'apothème de l'octogone, on aura alors :

Digitized by Google

en le désignant par x :

$$x'^2 = R^2 - \frac{1}{4} x^2 = R^2 \left[1 - \frac{1}{4}(2 - \sqrt{2})\right]$$

ou

$$x'^2 = \frac{R^2}{4}(2 + \sqrt{2})$$

D'où

$$x' = \frac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

En désignant par S la surface de l'octogone, nous aurons :

$$S = 4 x x' = 2R^2(\sqrt{2} + \sqrt{2})(\sqrt{2 + \sqrt{2}});$$

$$[2] \quad S = 2R^2\sqrt{2}$$

Pour avoir cette surface en fonction du côté a de l'octogone, il suffit de remplacer dans l'équation [2] R par sa valeur tirée de l'équation [1], soit :

$$R^2 = \frac{a^2}{2 - \sqrt{2}} \quad \text{ce qui nous donnera :}$$

$$S = \frac{2a^2\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{2a^2\sqrt{2}(2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2})} = 2a^2(1 + \sqrt{2})$$

Problème 170.

Dans un cercle donné, mener à angle droit deux diamètres AB et CD; par le point A mener la tangente AE et aussi la corde CB que l'on prolongera jusqu'à son intersection E avec la tangente. Entre les droites AE, EC et l'arc AC une certaine figure est comprise. On suppose que cette figure fait une révolution complète autour de AB. L'on veut connaître le volume ainsi engendré par cette figure. Désigner par R le rayon et après avoir trouvé la formule, on l'appliquera au cas de $R = 13549^{m}$. Effectuer le calcul par logarithmes, en faisant $\pi = 3,1416$.

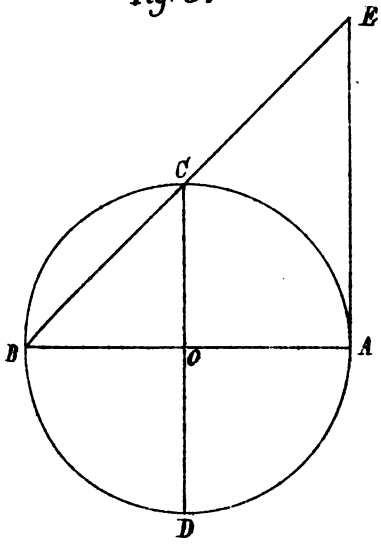
La corde BC prolongée, le diamètre AB et la tangente AE

Digitized by Google

formant un triangle rectangle isocèle, dans lequel la tangente : $AE = 2R$; et ce triangle, en tournant autour de AB, engendre un cône qui a pour volume :

$$[1] \quad \pi . 4R^2 . \frac{2R}{3} = \frac{8}{3} \pi R^3$$

Fig. 37



Soit O le centre du cercle (Voy. fig. 37), retranchons de ce volume :

1° le volume engendré par le $\frac{1}{4}$ de la surface du cercle

2° par le triangle COB.

Le premier de ces volumes égale la moitié de la sphère, c'est-à-dire :

$$\frac{2}{3} \pi R^3$$

L'autre est égal à :

$$\frac{\pi}{3} R^3$$

Le volume cherché égalera donc :

$$V = \frac{\pi}{3} (8R^3 - 2R^3 - R^3) = \frac{5}{3} \pi R^3$$

Appliquons à cette formule la valeur $R = 13549$

Calcul de V :

log 5	=	0,6989700
3 log. 13549	=	12,3957216
log. 3.1416	=	0,4971509
C^t (− log. 3)	=	$\bar{1}$,5228787
log V	=	13,1147212

D'où : V = 13023305,89221 m^c

Digitized by Google

Problème 171.

On demande de calculer à $0^m,001$ près la hauteur d'une zône sphérique, sachant que la surface de cette zône est de $25^{m.c.},26$ et que le volume de la sphère à laquelle elle appartient est de $402^{m.c.},23$?

Une zone a pour surface, en désignant par x sa hauteur et par R le rayon de la sphère à laquelle elle appartient.

$$2\pi R x$$

Et la sphère a pour volume :

$$\frac{4}{3}\pi R^3$$

On aura donc les deux équations suivantes :

$$[1] \quad 2\pi R x = 25,26$$

$$[2] \quad \frac{4}{3}\pi R^3 = 402,23$$

Éliminant R entre ces deux équations, on obtiendra :

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{25,26}{2\pi x}\right)^3 = 402.23$$

d'où :

$$x^3 = \frac{1(25,26)^3}{6\pi^2 402.23} = \frac{(25,26)^3}{2413,38\,\pi^2}$$

Calcul de $x = H$

$$3 \log. 25,26 = 4,2072999$$

$$\text{Ct. } (-\log. 3,1416 = \bar{1},0056981$$

$$\text{Ct. } (-\log. 2413,38 = \underline{6,6173743}$$

$$3 \log. x = \bar{1},8303723 \; ; \log. x = \bar{1},9434574$$

Par suite $x = 0^m.878$.

Problème 172

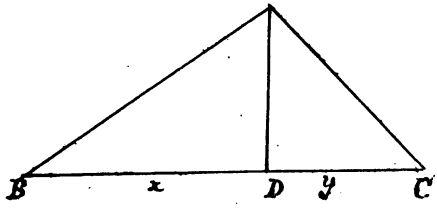
Du sommet A du triangle ABC, on abaisse la ligne AD perpendiculaire sur le coté BC, et l'on demande de calculer les deux segments BD et BC, sachant que l'on a :

Digitized by Google

AB = 309m.800

AC = 430m.168

BC = 689m.472



Représentons BD et BC (Voy. Fig. 38) par x et y. Désignons par a, b, c, les trois cotés du triangle, nous aurons évidemment l'équation :

[1] $x + y = a$

D'un autre coté le triangle rectangle BAD nous donnera : $C^2 - x^2 = AD^2$ et le triangle rectangle CAD, nous donnera $b^2 - y^2 = AD^2$ d'où l'équation :

[2] $c^2 - x^2 = b^2 - c^2$

où : $(y + x)(y - x) = b^2 - c^2$ en remplaçant dans cette dernière équation : $x + y$ par sa valeur a :

$$y - x = \frac{b^2 - c^2}{a}$$

D'où : $y = \frac{a}{2} + \frac{b^2 - c^2}{2a} = 349,736 + \frac{387,968 \times 172,368}{1378,944} = 448,232$

$$x = \frac{a}{2} - \frac{b^2 - c^2}{2a} = 349,736 - \frac{387,968 \times 172,368}{1378,944} = 250,240$$

Problème 173

On donne une droite AB de 3789m. On la divise en 1000 parties égales, puis à chaque division on élève une perpendiculaire à cette droite ; on prend une longueur de 0m.25 sur la première perpendiculaire, de 0m.50 sur la deuxième, de 0m.75 sur la troisième et ainsi de suite jusqu'à la millième perpendiculaire, en donnant toujours à chaque perpendiculaire 0m.25 de plus qu'à la précédente ; On forme un polygone en joignant les extrémités de toutes ces perpendiculaires et l'on propose de calculer l'aire comprise entre

Digitized by Google

ce polygone, la ligne AB est la dernière perpendiculaire ?

Au moyen de la construction énoncée dans cette question, nous aurons 999 trapèzes qui auront tous pour hauteur : $\frac{3789}{1000} = 3^{m}\,789$

Le premier trapèze aura pour mesure :

$$\frac{3,789}{2}(0.25 + 0.50);$$

Le deuxième :

$$\frac{3,789}{2}(0.50 + 0.75);$$

Le suivant :

$$\frac{3,789}{2}(0.75 + 1);$$

Ce qui forme une progression arithmétique qui a pour premier terme :

$$\frac{3,789}{2}(0.75);\ \text{pour raison :}\ \frac{3,789}{2}\,0^{m},50$$

Et enfin pour dernier terme :

$$\frac{3,789}{2}(999.0^{m}\,25 + 250)$$

Et par conséquent pour somme :

$$S = \frac{\left[\frac{3789 \times 0.75}{2} - \frac{3789}{2}(999 \times 0.25 + 250\right] 999}{2} =$$

$$= \frac{3,789}{2}(500,50)\,999 = 3,789 \times 125,126 \times 999 =$$

$$= 473624,526375.$$

Or, encore, la ligne qui joint les sommets des perpendiculaires étant une ligne droite, la figure est un trapèze qui a pour côtés parallèles $0^{m}\,25$ et 250^{m} et pour hauteur :

$$3789^{m},\ 3789$$

C'est donc pour surface :

$$S = \frac{250,25}{2} \times 3785,211$$

Digitized by Google

En effectuant on obtient le même résultat que ci-dessus.

Problème 174.

Une pyramide SABC, dont laquelle l'arête SA égale 24 m 638 est coupée par un plan abc parallèle à la base, de manière que le volume de la petite pyramide Sabc soit le dixième du volume de la pyramide totale SABC, on demande de calculer à 0m 001 près la longueur Sa.

Les pyramides semblables étant entre elles comme les cubes de leurs côtés homologues. Si nous désignons par x l'arête Sa on aura l'équation :

$$\frac{x^3}{24,638^3} = \frac{1}{10} \quad \text{d'où : } x = \sqrt[3]{\frac{24\,638^3}{10}} = 11,435$$

Problème 175

Les trois côtés d'un triangle ABC étant respectivement :

AB = 1551 m

AC = 2068 m

BC = 2585 m

Trouver la grandeur de la droite AD qui joint le sommet A au milieu de la base BC ?

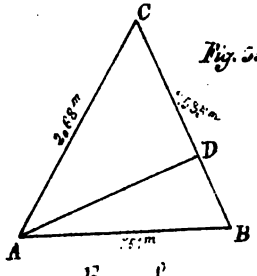


Fig. 58.

On sait que dans tout triangle (Voy. fig. 39)

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\left(\frac{\overline{BC}^2}{4}\right),$$

donc :

$$\overline{AD}^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - \frac{\overline{BC}^2}{2}\right)$$

$$\overline{AD}^2 = \frac{1}{4}\left(2\overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2\right)$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs respectives

Digitized by Google

on a :

$$AD^2 = \frac{1}{4}(4811202 + 8553248 - 668225)$$

$$AD^2 = \frac{1}{4}\,7668225$$

D'où :

$$AD = \frac{1}{2}\,2585 = 1292^m,5$$

Problème 176

Quelle est en hectares, ares et centiares, la surface d'un segment de cercle correspondant à un arc de 60° ? $R = 876^m$.

La surface du cercle est donnée par la formule :

$$S = \pi R^2$$

Celle du secteur est :

$$\frac{1}{6}\pi R^2$$

Si on retranche la surface du triangle équilatéral qui a pour côté le rayon R et qui est égale à $\frac{R^2}{4}\sqrt{3}$, on aura pour surface du segment :

$$\left(\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{4}\sqrt{3}\right) R^2 = 0,5235987 - 0,4330127 \overline{876}^2 =$$
$$= 0,0905860 \times \overline{876}^2$$

Calcul de la surface du segment :

$$2 \log 876 = 5.8850082$$
$$\log 0.0905860 = \bar{2}.9570611$$
$$\log \text{surf} = 4.8420693$$

d'ou : surf du segm = 69.513^m95

ou bien :

Surf. du segm. 6 hect. 95 ares 13 cent. 5

Problèmes

Digitized by Google

Problème 177.

Quel est le côté du dodécagone régulier inscrit dans un cercle qui a pour circonférence 3m.60 ?

Soit R le rayon du cercle circonscrit à un polygone qui a C pour côté et désignons par x le côté d'un polygone inscrit dans le même cercle ayant un nombre double de côtés ; L'apothème du polygone qui a pour coté C est : $\sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$. Or, le coté x est une moyenne proportionnelle entre le diamètre et la partie du diamètre égale au rayon diminué de l'apothème, c. à. d

$$R - \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}}$$

Nous aurons donc

$$x = 2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{c}{4}}\right) = R\left(2R - \sqrt{4R^2 - c^2}\right.$$

Nous déterminerons R au moyen de la formule :

$$R = \frac{3,60}{\pi}$$

Par suite :

$$x^2 = \frac{3,60}{2\pi}\left(\frac{3.60}{\pi} - \sqrt{\frac{\overline{3.60}^2}{\pi^2} - \frac{\overline{3.60}^2}{4\pi^2}}\right.$$

D'où :

$$x = \sqrt{\frac{\overline{3.60}^2}{4\pi^2}\left(2 - \sqrt{3}\right)} = 0^m.2966$$

Problème 178

La surface d'une sphère est de 32 m. car. (Déterminer le volume d'un segment dont la base est déterminée par un plan secant mené à une distance du centre égale à 0m.50.

Le rayon de la sphère est égal à :

Digitized by Google

$$R = \sqrt{\frac{8}{\pi}}$$

Le segment a une base qui a pour mesure en désignant par h sa hauteur et par r le rayon:

$\frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi r^2 h$. Comme il est facile de le voir ici:

$$h = \sqrt{\frac{8}{\pi}} - 0.50 \text{ et } r^2 = \left(\sqrt{\frac{8}{\pi}} + 0.50\right)\left(\sqrt{\frac{8}{\pi}} - 0.50\right)$$

ou:

$$r^2 = \frac{8}{\pi} - 0.25$$

En substituant ces valeurs, on aura pour le volume demandé V:

$$V = \frac{1}{6}\pi\left(\sqrt{\frac{8}{\pi}} - 0.50\right)^3 + \frac{1}{2}\pi\left(\frac{8}{\pi} - 0.25\right)\left(\sqrt{\frac{8}{\pi}} - 0.50\right)$$

ou:

$$V = 4^{mc}, 641690.$$

Problème 179.

On coupe une sphère dont le rayon est de $0^m.50$ par un plan tel que la section soit un cercle dont le rayon est de $0^m.20$. Calculer à un centimètre carré près, la surface de chacune des deux portions de la sphère ?

Désignons par R le rayon de la sphère, par H la hauteur de la zone, cette zone aura pour mesure:

$$2\pi RH.$$

Pour calculer la hauteur, il suffira de se rappeler que le carré du rayon du petit cercle, obtenu par le plan sécant est une moyenne proportionnelle entre les deux segments H et 2R-H du diamètre, ce qui conduit à l'équation

$$H(2R-H) = 0,2^2; \quad H^2 - 2RH + 0,2^2 = 0$$

D'où on tire

$$H = R \pm \sqrt{R^2 - 0,2^2} = 0,5 \pm \sqrt{0,25 - 0,04}$$

On aura pour la surface des deux zones:

Digitized by Google

1° $2\pi . 0,5 (0,5 - \sqrt{0,21}) = 0,1312$

2° $2\pi . 0,5 (0,5 + \sqrt{0,21}) = 3,0104.$

Problème 180.

Déterminer la surface engendrée par une ligne brisée inscrite dans une demi-circonférence qui tourne autour de son diamètre. Application au cas où le rayon étant égal à l'unité, la ligne brisée se compose :

1° Du côté de l'hexagone ; 2° Du côté du dodécagone ; 3° Du côté du carré inscrit ?

La surface engendrée par une ligne brisée est égale à la circonférence du cercle qui a pour rayon l'apothème du polygone inscrit multipliée par la projection de la ligne brisée sur le diamètre.

1° La surface décrite par le côté de l'hexagone est égale à :

$$2\pi R . \sqrt{3} \times \frac{R}{2}$$

2° Celle décrite par le côté du dodécagone sera égale à :

$$2\pi \left(\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}\right) \frac{R}{2}$$

3° Enfin celle décrite par le côté du carré inscrit sera :

$$2\pi \frac{R}{2} \sqrt{2} . R.$$

On aura pour l'expression S' de la surface totale engendrée par la ligne brisée :

$$S' = 2\pi \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{4}\sqrt{2+\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

On bien en effectuant les calculs :

Digitized by Google

S = 10 mars 1981.

Problème 181.

Une bille va de A en B sur un billard, après avoir touché la bande CD. On donne AB = 2m. Les distances des points A et B à la bande CD sont respectivement AF = 1m; BF = 1m.50. On propose de calculer la longueur du chemin parcouru par la bille ?

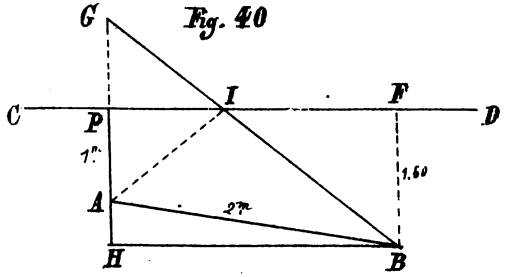


Fig. 40

Par le point B menons une parallèle BH à la bande CD. Prolongeons la perpendiculaire AE d'une quantité :

EG = AE = 1m

(Voy. fig. 40)

et jusqu'à la rencontre de la parallèle BH, la ligne :

$$AH = FB - AE = 0^m,50.$$

En joignant le point B au point G, nous aurons le chemin parcouru par la bille, lequel se compose, comme il est facile de le voir de :

$$AI + IB;$$

Et comme $AI = GI$,

$$AI + IB = GI + IB = GB.$$

Or GB est l'hypoténuse d'un triangle rectangle GHB par conséquent :

$$GB = \sqrt{\overline{GH}^2 + \overline{HB}^2}$$

Mais

$$\overline{HB}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AH}^2 = 4 - 0.25 = 3{,}75$$

Digitized by Google

Donc :

$$GB = \sqrt{2,50^2 + 3,75}$$

Ou :

$$GB = \sqrt{10}$$

D'où :

$$GB = 3^m,162.$$

Digitized by Google

Algèbre.

Résolution des équations du Premier degré à une seule inconnue.

Problème 182.

Résoudre l'équation :

$$8x - 5 = 13 - 7x$$

Faisant passer $-7x$ dans le premier membre et -5 dans le second, l'équation ci-dessus pourra s'écrire :

$$8x + 7x = 13 + 5$$

Ou

$$15x = 18$$

D'où

$$x = \frac{18}{15} = 1.20.$$

Problème 183.

Résoudre l'équation

$$2x + 7 + \frac{3x}{2} = 6x - 23$$

Chassant le dénominateur 2, il viendra :

$$4x + 14 + 3x = 12x - 46$$

Ou bien :

$7x + 14 = 12x - 46$ faisant passer $7x$ dans le second membre et -46 dans le premier, nous aurons :

$$14 + 46 = 12x - 7x$$

ou

$$60 = 5x$$

D'où

$$x = \frac{60}{5} = 12.$$

Digitized by Google

Problème 184.

Résoudre l'équation

$$3,25x - 5,007 - x = 0,2 - 0,34x.$$

Faisant passer 0,34 x dans le premier membre et 5,007 dans le second, il viendra

$$3,25x - x + 0,34x = 0,2 + 5,007$$

En toutes réductions faites : $2,59x = 5,207$

D'où

$$x = \frac{5,207}{2,59} = 2,01$$

Problème 185.

Résoudre l'équation :

$$ax \pm b = c$$

Faisant passer $\pm b$ dans le second membre, il viendra :

$$ax = c \mp b$$

D'où

$$x = \frac{c \mp b}{a}$$

Problème 186

Résoudre l'équation :

$$ax + b = cx + dx$$

Cette équation peut s'écrire

$ax + b = (c + d)x$; faisant ax dans le second membre, il vient :

$(c+d)x - ax = b$ ou bien :

$[(c+d) - a]x = b$ D'où :

$$x = \frac{b}{(c+d) - a}$$

Digitized by Google

Problème 187.

Résoudre l'équation :

$$(a+x)(b+x)-a(b+c)-x^2=\frac{a^2c}{b}$$

Equation qui revient à cette autre :

$$ab+bx+ax+x^2-ab-ac-x^2=\frac{a^2c}{b}$$

En simplifiant :

$$bx+ax-ac=\frac{a^2c}{b}$$ ou bien :

$$bx+ax=\frac{a^2c}{b}+ac$$

Ou encore :

$$(b+a)x=\frac{a^2c+acb}{b}$$

Ce qu'on peut écrire :

$$(b+a)x=\left(\frac{a^2+ab}{b}\right)c \text{ ou } (b+x)x=\frac{(a+b)ac}{b}$$

D'où on tire : $x=\frac{(a+b)ac}{b(b+a)}=\frac{ac}{b}$

Problème 188.

Résoudre l'équation :

$$5a^3cx+ac^2x-5abc^2-3a^3c^2=5a^2bcx+bc^2x-3abc^2-5a^2c^2$$

Faisons passer dans le premier membre tous les termes qui contiennent x et dans le second tous les termes indépendants, il viendra alors :

$$5a^2cx+ac^2x-5a^2bcx-bc^2x=5abc+3a^3c^2+3a^2bc^2+5a^2c^2$$

de laquelle on tire facilement :

$$x=\frac{3a^2c-5ac}{5a^2+c}$$

Problème 189.

Résoudre l'équation :

Digitized by Google

$$\frac{ax}{b} + \frac{cx}{d} + \frac{ex}{f} = g + h.$$

En chassant les dénominateurs de cette équation, on trouve :

$$adfx + befx + bdex = (h+g)\,bdf$$

Ou bien :

$$(adf + bef + bde)\,x = (h+g)\,bdf$$

Ou encore :

$$[adf + (de + ef)]\,x = (h+g)\,bdf$$

D'où enfin :

$$x = \frac{(h+g)\,bdf}{adf + b(de+ef)}$$

Problèmes du 1er degré à une seule inconnue.

Problème 190.

Partager un nombre a en trois parties telles que la première soit à la deuxième comme m est à n, et la deuxième soit à la troisième comme p est à q ?

Si nous désignons par x la première des trois parties, nous aurons d'après l'énoncé du problème, l'équation suivante :

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{qnx}{pm} = a$$

Chassant les dénominateurs il viendra :

$$x \times m \times pm + nx \times pm + qnx \times m = a \times m \times pm$$

Ou bien :

$$x(pm + np + qn) = apm.$$

D'où on tire :

$$x = \frac{apm}{pm + np + qn} \quad \text{1re partie.}$$

Digitized by Google

$$\frac{apn}{pm+np+qn} \quad 2^e \text{ partie}$$

$$\frac{aqn}{pm+np+qn} \quad 3^e \text{ partie}$$

Problème 191.

On multiplie un nombre par 6 et on divise le produit par 10. Le quotient obtenu est 9. On propose de trouver ce nombre ?

Désignant par x le nombre inconnu, on aura en traduisant l'énoncé, l'équation suivante :

$$\frac{6x}{10} = 9$$

Chassant le dénominateur, il vient :

$$6x = 90 \text{ d'où } x = \frac{90}{6} = 15$$

Le nombre cherché est 15.

Problème 192.

On a placé pour un an un certain capital au taux de 5 %, le revenu et le capital réunis produisent une somme de 131250 ; quel était le capital ?

Si nous désignons par x le capital cherché l'intérêt rapporté par ce capital en un an sera de $\frac{5x}{100}$, nous aurons pour trouver l'inconnu, à résoudre l'équation :

$$x + \frac{5x}{100} = 131250$$

Chassant le dénominateur il viendra :

$$100x + 5x = 13125000$$

Ou bien $\quad 105x = 13125000$

D'où $\quad x = \frac{13125000}{105} = 125000^f$

125000 f était donc le capital placé.

Digitized by Google

Problème 193.

Partager un nombre a en deux parties dont le rapport soit égal à $\frac{p}{q}$?

En désignant par x l'une des parties, l'autre sera évidemment représentée par $a-x$ par suite leur rapport sera égal à : $\frac{x}{a-x}$ Nous n'avons pour résoudre la question qu'à écrire l'égalité suivante :

$$\frac{x}{a-x} = \frac{p}{q}$$

Ou ce qui revient au même :

$$qx = ap - px$$

Ou bien :

$$px + qx = ap$$

Mettons x en facteur commun :

$$x(p+q) = ap$$

D'où :

$$x = \frac{ap}{p+q}$$

Donc :

$$1^{re} \text{ partie} = \frac{ap}{p+q}$$

Par suite :

$$2^{e} \text{ partie} = \frac{aq}{p+q}$$

Problème 194.

On donne deux nombres c et d, on demande quel nombre il faudrait ajouter à chacun d'eux pour que le rapport des deux sommes fût égal à $\frac{p}{q}$?

Digitized by Google

Soit x le nombre cherché. Ajoutons cette quantité inconnue à c et à d on aura :

$c+x$ et $d+x$ et le rapport de ces deux quantités étant $\frac{c+x}{d+x}$ la solution du problème sera donnée en l'équation :

$$\frac{c+x}{d+x}=\frac{p}{q}$$

Chassant les dénominateurs, il vient :

$$(c+x)q=(d+x)p$$

Ou bien :

$$cq+qx=dp+px$$

Ou encore :

$$qx-px=dp-cq$$

Mettant x en facteur commun :

$$(q-p)x=dp-cq$$

D'où on tire :

$$x=\frac{dp-cq}{q-p}.$$

Résolution des équations du 1er degré à plusieurs inconnues

Problème 195.

Résoudre les équations :

$$[1] \quad 3x+2y=118$$
$$[2] \quad x+5y=191$$

De l'équation [2] tirons la valeur d'x :

$$x=191-5y,$$

Substituons cette valeur dans l'équation [1], il viendra :

Digitized by Google

$$3(191 - \tfrac{5}{c}y) + \tfrac{2}{c}y = 118$$

ou : $573 - 15y + 2y = 118$

Ou encore : $573 - 118 = 15y - 2y$

$455 = 13y$ On tire de cette dernière équation : $y = \frac{455}{13} = 35$ par suite : $x = 16$

Problème 196.

Résoudre les équations :

$$[1] \quad 7y = 2x - 3y$$

$$[2] \quad 19x - 60y = 621\tfrac{1}{4}$$

De la première équation on tire :

$10y = 2x$ ou bien $x = 5y$; substituant cette valeur de x dans l'équation : [2] il viendra :

$$19.5y - 60y = 621\tfrac{1}{4}$$

ou $95y - 60y = 621\frac{1}{4}$

Ou encore $35y = 621\frac{1}{4}$

d'où on tire : $y = \frac{621+\frac{1}{4}}{35} = 17 + \frac{3}{4}$ et par suite $x = 88 + \frac{3}{4}$

Problème 197.

Résoudre les équations :

$$[1] \quad \frac{a}{b+y} = \frac{b}{3a+x}$$

$$[2] \quad ax + 2by = d$$

Chassant les dénominateurs de la première équation il vient : $3a^2 + ax = b^2 + by$, les équations [1] et [2] peuvent donc s'écrire :

$$3a^2 + ax = b^2 + by$$

$$ax + 2by = d$$

De cette dernière équation on tire : $ax = d - 2by$; substituant cette valeur dans la première équation il vient :

Digitized by Google

$$3a^2 + d - 2by = b^2 + by \text{ ou bien}$$
$$3a^2 - b^2 + d = 3b \cdot y$$

On tire alors : $y = \dfrac{3a^2 - b^2 + d}{3b}$

Si maintenant nous mettons dans la valeur de x celle de y, il viendra :

$$x = \frac{d - 2b\left(\frac{3a^2 - b + d}{3b}\right)}{a}$$

En effectuant les calculs et simplifiant, il vient enfin :

$$x = \frac{2b^2 - 6a^2 + d}{3a}$$

Problème 198.

Résoudre les équations :

$$[1] \quad x + y = 10$$
$$[2] \quad x + z = 19$$
$$[3] \quad y + z = 23$$

De l'équation [1] on tire : $x = 10 - y$.

Substituant cette valeur dans l'équation [2] nous aurons :

[4] $z - y = 9$ Ajoutant les équations [3] et [4] membre à membre, on a : $2z = 32$ d'où $z = \frac{32}{2} = 16$

Retranchant [3] de [4] il vient $-2y = -14$ d'où $y = \frac{14}{2} = 7$

Par suite : $x = 10 - 7 = 3$

Problème 199.

Résoudre les équations :

$$[1] \quad x + y + z = a$$
$$[2] \quad my = nx$$
$$[3] \quad pz = qx$$

Digitized by Google

Des équations [2] et [3] on tire :

$$y = \frac{nx}{m} \; ; \; z = \frac{qx}{p}$$

substituant ces valeurs de y et de z dans l'équation [1] il vient :

$$[4] \quad x + \frac{nx}{m} + \frac{qx}{p} = a$$

Chassant les dénominateurs on aura :

$$mpx + npx + mqx = mpa$$

Ou bien : $(mp + np + mq)\,x = mpa$

d'où

$$x = \frac{amp}{mp + np + mq}$$

Par suite on aura pour y et z :

$$y = \frac{anp}{mp + np + mq} \; ; \; z = \frac{amq}{mp + np + mq}$$

Problème 200.

Résoudre les équations :

$$[1] \quad 3x + 5y = 161$$
$$[2] \quad 7x + 2z = 209$$
$$[3] \quad 2y + z = 89$$

De la première équation, mettons la valeur de x :

$$x = \frac{161 - 5y}{3}$$

substituant cette valeur dans l'équation [2] il viendra : $7\left(\frac{161 - 5y}{3}\right) + 2x = 209$,

Chassant le dénominateur, on a :

$$1127 - 35y + 6z = 627$$

Ou bien : $[4] \quad 35y - 6z = 500$ De l'équation [3] on tire : $z = 89 - 2y$, substituant cette valeur de z dans l'équation [4] on aura :

$$35y - 6(89 - 2y) = 500$$

Ou bien : $35y - 534 + 12y = 500$

$$47y = 1034$$ d'où on tire : $y = \frac{1034}{47} = 22$

Par suite $z = 45$, $x = 17$.

Problème

Digitized by Google

Problème 201.

Résoudre les équations :

$$[1] \quad 53 - \frac{x}{2} - \frac{z}{2} = y - 109$$
$$[2] \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 26$$
$$[3] \quad 5y = 4z$$

De l'équation [3] on tire : $z = \frac{5y}{4}$; Réduisons les équations [1] et [2], c'est-à-dire chassons les dénominateurs, les deux premières équations deviendront :

$$[4] \quad 13y + 4x = 1296$$
$$[5] \quad 2x + y = 208.$$

Après avoir remplacé dans la première z par sa valeur tirée de l'équation [3]. De l'équation [5] on tire $y = 208 - 2x$. Substituons cette dernière valeur dans l'équation [4], il viendra :

$$13(208 - 2x) + 4x = 1296$$

Oubien : $2704 - 26x + 4x = 1296$

$$22x = 1408 \text{ d'où } x = \frac{1408}{22} = 64$$

par suite : $y = 80$ et $x = 100$.

Problème 202.

Résoudre les équations :

$$[1] \quad 2x + 4y - 3z = 22$$
$$[2] \quad 4x - 2y + 5z = 18$$
$$[3] \quad 6x + 7y - z = 63$$

De la première équation on tire :

$$x = \frac{22 - 4y + 3z}{2}$$

Substituons cette valeur de x dans les équations [2] et [3], il viendra :

$$4\left(\frac{22 - 4y + 3z}{2}\right) - 2y + 5z = 18$$
$$6\left(\frac{22 - 4y + 3z}{2}\right) + 7y - z = 63$$

Digitized by Google

Ce qui donne en effectuant les calculs, chassant les dénominateurs et transposant :

$$88 - 16y + 12x - 4y + 10z = 36$$

$$132 - 24y + 18z + 14y - 2z = 126$$

Ou ce qui revient au même :

$$[4] \quad 20y - 22z = 52$$

$$[5] \quad 10y - 16z = 6$$

De l'équation [4] on tire : $y = \frac{52 + 22z}{20}$

Substituant cette valeur dans [5] il viendra :

$$10\left(\frac{52 + 22z}{20}\right) - 16z = 6$$

Chassant le dénominateur, on a : $520 + 220z - 320z = 120$

Ou bien : $100z = 400$ d'où $z = \frac{400}{100} = 4$.

Et par suite : $x = 3$ et $y = 7$

Problème 203.

Résoudre les équations :

$$[1] \quad x + \frac{y}{2} = 1$$

$$[2] \quad y + \frac{z}{3} = 1$$

$$[3] \quad z + \frac{x}{4} = 1$$

Chassant les dénominateurs les équations ci-dessus deviennent :

$$[4] \quad 2x + y = 2$$

$$[5] \quad 3y + z = 3$$

$$[6] \quad 4z + x = 4$$

De l'équation [4] on tire :

$$y = 2 - 2x$$

Substituant cette valeur dans l'équation [5] il vient

$$3(2 - 2x) + z = 3$$

Ou bien : $6x - z = 3$ il reste donc à résoudre le système des deux équations :

$$(4) \quad 6x - z = 3$$

$$(3) \quad 4z + x = 4$$

Digitized by Google

De la première (α) on tire : $z = 6x - 3$ et substituant cette valeur de z dans l'équation (β) il viendra :

$$u(6x-3) + x = 4$$

On bien $25x = 16$ d'où $x = \frac{16}{25}$

Par suite : $y = \frac{18}{25}$; $z = \frac{21}{25}$

Problème 204.

Résoudre les équations :

$$[1] \quad y + 2x = 10$$
$$[2] \quad z + 3y = 17$$
$$[3] \quad u + 4z = 26$$
$$[4] \quad v + 5u = 37$$
$$[5] \quad x + y + z + u + v = 25.$$

De la première équation on tire :

$y = 10 - 2x$, l'équation [2] donne pour z :

$z = 17 - 3y = 6x - 13$, y étant remplacé par sa valeur tirée de la première équation on aura de même pour u :

$$u = 26 - 4z = 78 - 24z$$

u est encore exprimé, comme on le voit, au moyen de l'inconnue x.

Enfin on aura pour v :

$$v = 37 - 5u = 120x - 353.$$

Substituant maintenant les valeurs des inconnues y, z, u et v dans l'équation [5], on obtiendra :

$$x + 10 - 2x + 6x - 13 + 78 - 24x + 120x - 353 = 25.$$

On bien réduisant et transposant :

$$101x = 303 \text{ d'où : } x = \frac{303}{101} = 3$$

Et par suite :

$$y = 4 ; \quad z = 5 ; \quad u = 6 ; \quad v = 7$$

Digitized by Google

Problème 205.

Résoudre les équations :

$$[1] \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 41$$
$$[2] \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 31$$
$$[3] \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 25$$

Chassant les dénominateurs de ces trois équations on obtient le système suivant équivalent :

$$[4] \quad 12x + 8y + 6z = 984$$
$$[5] \quad 20x + 15y \quad 12z = 1860$$
$$[6] \quad 30x + 24y \quad 20z = 2000$$

De l'équation [4] on tire :

$$z = \frac{984 - 12x - 8y}{6}$$

Substituant cette valeur de z dans les équations [5] et [6] il viendra :

$$20x + 15y + 12\left(\frac{984 - 12x - 8y}{6}\right) = 1860$$
$$30x + 24y + 20\left(\frac{984 - 12x - 8y}{6}\right) = 2000$$

En effectuant les calculs et en simplifiant on arrive à un système de deux équations à deux inconnues x et y qu'on doit résoudre. Ces équations donnent pour x et pour y les valeurs suivantes :

$$x = 12 \text{ et } y = 60.$$

En substituant ces valeurs dans celle de z donnée plus haut, il vient :

$$z = \frac{984 - 144 - 480}{6} = \frac{360}{6} = 60$$

Problème 206.

Résoudre les équations :

$$[1] \quad x + y + z + t = a$$
$$[2] \quad y + z + t + v = b$$
$$[3] \quad z + t + v + x = c$$
$$[4] \quad t + v + x + y = d$$
$$[5] \quad v + x + y + z = e$$

Digitized by Google

Dans le système de ces cinq équations on voit que chaque inconnue se répète quatre fois, si donc on ajoute ces équations membre à membre et si d'ailleurs on désigne, pour abréger par S la somme : $a+b+c+d+e$, il viendra :

$$4(x+y+z+t+v)=S$$

Ou bien : [6] $x+y+z+t+v=\frac{S}{4}$

Nous savons donc maintenant que la somme des inconnues égale : $\frac{a+b+c+d+e}{4}$ pour avoir chacune d'elles il suffira de retrancher successivement chacune des équations proposées de l'équation [6] puisque chacune des équations écrites ci-dessus contient quatre des cinq inconnues renfermées dans le premier membre de l'équation [6]. Retranchant les équations [1] et [6] membre à membre, il viendra donc :

$v=\frac{S}{4}-a$; de même retranchant successivement les équations : [2], [3] [4], [5], de l'équation [6] on aura pour les inconnues : x, y, z et t :

$$x=\frac{S}{4}-b;\ y=\frac{S}{4}-c;\ z=\frac{S}{4}-d;\ t=\frac{S}{4}-e$$

Problème 207.

Résoudre les équations :

[1] $x+y+z+t+u=a$

[2] $x+y+z+u+v=b$

[3] $x+y+z+t+v=c$

[4] $x+y+u+t+v=d$

[5] $x+z+u+t+v=e$

[6] $y+z+u+t+v=f$

Ce système de 6 équations se résoudra de la même manière que le système précédent, nous voyons, en effet, que les inconnues x, y, z, t, u, v se répètent cinq fois, il nous suffira donc pour le système proposé

Digitized by Google

d'additionner les 6 équations membres en ayant soin de désigner par S la somme $a+b+c+d+e+f$, on aura alors :

$$5(x+y++z+t+u+v)=S$$

D'où : $[7]\ x+y+z+t+u+v=\frac{S}{5}$.

Retranchant enfin successivement les Equations [1], [2], [3], [4], [5], [6] de l'équation [7], il viendra pour la valeur des inconnues x, y, z, t, u, v :

$$x=\frac{S}{5}-f\ ;\ y=\frac{S}{5}-e$$
$$z=\frac{S}{5}-d\ ;\ u=\frac{S}{5}-c$$
$$t=\frac{S}{5}-b\ ;\ v=\frac{S}{5}-a$$

Problèmes du 1er Degré à plusieurs inconnues.

Problème 208.

Trouver deux nombres dont la somme soit 42 et la différence 8 ?

L'énoncé du problème fournit immédiatement les deux équations :

$$[1]\quad x+y=42$$
$$[2]\quad x-y=8$$

De l'équation [1] on tire : $x=42-y$; portant cette valeur de x dans l'équation [2] il vient :

$$42-y-y=8$$

Ou bien :

$$42-2y=8$$

Ou encore :

$$2y=34.\ \text{d'où}\ y=\frac{34}{2}=17$$

Par suite $x=25$.

Digitized by Google

Problème 209.

La somme de deux nombres est a, leur différence est b, exprimer la valeur de chacun d'eux?

Soit x le plus grand nombre et y le plus petit, on aura les deux équations :

$$[1] \quad x + y = a$$
$$[2] \quad x - y = b$$

De l'équation [1] on tire :

$$x = a - y$$

Substituant cette valeur dans l'équation [2] il vient :

$$a - y - y = b.$$

Ou bien :

$$a - 2y = b$$

Ou encore :

$$2y = a - b \quad \text{d'où } y = \frac{a-b}{2}.$$

Et par suite : $x = \frac{a+b}{2}$

Ces résultats peuvent s'énoncer ainsi :

Quand on connaît la somme de deux nombres et leur différence, on obtient le plus grand en ajoutant à la demi-somme la demi-différence et le plus petit en retranchant de la demi-somme la demi-différence.

Problème 210.

De deux nombres on multiplie l'un par a, l'autre par b et la somme des produits est égale à K; si l'on avait multiplié le premier par a' et le deuxième par b', la somme des produits aurait été égale à K'; quels sont ces deux nombres ?

Désignons par x et y les deux nombres inconnus. L'énoncé du problème fournit immédiatement les

Digitized by Google

deux équations suivantes :

$$[1] \quad ax + by = K$$
$$[2] \quad a'x + b'y = K'$$

On tire de l'équation [1] :

$x = \frac{K - by}{a}$. Substituant cette valeur de x dans l'équation [2], il vient :

$$a'\left(\frac{K - by}{a}\right) + by = K'$$

Ou bien en effectuant et transposant :

$y(ab' - a'b) = aK' - a'K$ d'où : $y = \frac{aK' - a'K}{ab' - a'b}$

Par suite :

$$x = \frac{b'K - bK'}{ab' - ba'}$$

Problème 211.

Quels sont les deux nombres tels qu'en augmentant le premier de 8 on obtient un résultat 3 fois $\frac{1}{4}$ aussi grand que le deuxième nombre, et en augmentant le deuxième de 4 le résultat n'est que la moitié du premier ?

Désignons par x et y les deux nombres inconnus, l'énoncé du problème fournit immédiatement les deux équations :

$$[1] \quad x + 4 = \frac{13}{4} y$$
$$[2] \quad y + 8 = \frac{x}{2}$$

En résolvant ces équations, on trouve pour les deux nombres cherchés 48 et 18 qui satisfont bien aux conditions de l'énoncé.

Problème 212.

Quelle est la fraction telle que si l'on ajoute

Digitized by Google

1 à son numérateur, la valeur est $\frac{1}{3}$, et si l'on ajoute 1 au dénominateur, sa valeur est $\frac{1}{4}$?

Désignons par x le numérateur inconnu et par y le dénominateur, les conditions énoncées s'expriment au moyen des deux équations :

$$[1] \quad \frac{x+1}{y} = \frac{1}{3}$$

$$[2] \quad \frac{x}{y+1} = \frac{1}{4}$$

De la première on tire :

$$x = \frac{y}{3} - 1$$

Substituant cette valeur dans l'équation [2] on aura :

$$\frac{\frac{y}{3} - 1}{y+1} = \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad 4\left(\frac{y}{3} - 1\right) = y + 1$$

Ou encore :

$$4y - 12 = 3y + 3 \quad \text{et} \quad y = 15$$

Par suite : $x = 4$

La fraction cherchée est égale à : $\frac{4}{15}$

Problème 213.

Trouver la fraction telle que, si l'on retranche 3 des deux termes, sa valeur se réduise à $\frac{1}{4}$, elle devienne égale à $\frac{1}{2}$, si l'on ajoute 5 au numérateur et au dénominateur ?

Désignant, comme dans le problème précédent, par x le numérateur de la fraction cherchée et par y son dénominateur, on obtient les équations suivantes :

$$[1] \quad \frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{4}$$

$$[2] \quad \frac{x+5}{y+5} = \frac{1}{2}$$

La résolution de ces équations n'offrant

Digitized by Google

aucune difficulté en donnant pour $x = 9$ et $y = 19$.

Problème 214.

Trouver un nombre de deux chiffres, tel que le quadruple du chiffre des unités surpasse d'une unité le triple du chiffre des dizaines; et qu'en retranchant de ce nombre le nombre renversé on ait 36 pour reste ?

Désignons par y le chiffre des unités et par x le chiffre des dizaines, l'énoncé du problème fournit immédiatement le système des deux équations :

$$[1] \quad 4y - 3x = 1$$

$$[2] \quad 10x + y - 10y - x = 36$$

De l'équation [1] on tire :

$$y = \frac{1+3x}{4}$$

Substituant cette valeur de y dans l'équation [2] il viendra :

$$10x + \left(\frac{1+3x}{4}\right) - 10\left(\frac{1+3x}{4}\right) - x = 36$$

Ou bien !

$$40 + 1 + 3x - 10 - 30x - 4x = 144$$

En réduisant et transposant, on a enfin :

$$9x = 153 \quad \text{d'où } x = \frac{153}{9} = 17$$

Par suite $y = 13$.

La question que nous venons de traiter est ce qu'on appelle, en algèbre, un problème impossible. En effet, la nature de la question exige que les deux nombres cherchés soient moindres que 10 ; puisque les valeurs de x et y dépassent cette quantité, on voit que le problème est impossible.

Problème

Problème 215.

Un homme qui s'est chargé de transporter des vases de porcelaine de trois grandeurs a fait ce marché : qu'il payerait autant par chaque vase qu'il casserait, qu'il recevrait pour ceux qu'il rendrait en bon état. On lui donne d'abord deux petits vases, quatre moyens et neuf grands ; il casse les moyens, rend tous les autres en bon état et reçoit une somme de 28 francs. On lui donne ensuite sept petits vases, trois moyens et cinq grands ; cette fois il rend les petits et les moyens, mais il casse les 5 grands, et il reçoit seulement 3 francs. Enfin on lui remet 9 petits vases, dix moyens et onze grands ; il casse tous ces derniers et ne reçoit en conséquence que 4 francs. On demande ce qu'on a payé pour le transport d'un vase de chaque grandeur ?

Désignons par :

x le prix du transport d'un petit vase

y celui du transport d'un moyen,

z id id d'un grand.

L'énoncé du problème fournit immédiatement les trois équations suivantes :

$$(1) \quad 2x - 4y + 9z = 28$$

$$(2) \quad 7x + 3y - 5z = 3$$

$$(3) \quad 9x + 10y - 11z = 4$$

De la première équation on tire :

$$x = \frac{28 + 4y - 9z}{2}$$

Substituant cette valeur de x dans les équations [2] et [3], il viendra :

$$\frac{196 + 28y - 63z}{2} + 3y - 5z = 3$$

$$\frac{252 + 36y - 81z}{2} + 10 - 11z = 4$$

Digitized by Google

Chassant les dénominateurs, on aura :

$$196 + 28y - 63z + 6y - 10z = 6$$
$$252 + 36y - 81z + 9oy - 9z = 8$$

Ou bien :

$$[4] \quad 196 + 34y - 73z = 6$$
$$[5] \quad 252 + 56y - 103z = 8$$

De l'équation [4] on tire :

$$y = \frac{73z - 190}{34}$$

Portant cette valeur de y dans l'équation [5] il vient enfin :

$$252 + 56\left(\frac{73z - 190}{34}\right) - 103z = 8$$

Chassant le dénominateur 34 on a :

$$34 \times 252 + 56 \times 73z - 56 \times 190 - 34 \times 103z = 34 \times 8$$

Ou bien en effectuant les calculs :

$$8568 + 4088z - 10640 - 3502z = 272$$

Ou encore :

$$586z - 2072 = 272$$

On tire de cette dernière équation :

$$z = \frac{2344}{586} = 4$$

Par suite :

$$y = 3, \text{ et } x = 2$$

On a donc payé : 2f pour le transport d'un petit vase,
3f ..... id ..... d'un moyen ;
4f ..... id ..... d'un grand.

Problème 216.

Un homme rencontrant des pauvres, veut donner 0f 25c à chacun ; mais en comptant sa monnaie il s'aperçoit qu'il lui manque pour cela 0f 10c ; alors il ne donne que 0f 20c à chaque pauvre et il lui reste 0f 25c. On demande combien cet homme avait de monnaie, et quel était le nombre des pauvres ?

Digitized by Google

Désignons par x la somme que possédait cet homme et par y le nombre des pauvres. L'énoncé du problème nous fournit les deux équations suivantes :

$$[1] \quad 0,25y - 0,10 = x$$
$$[2] \quad 0,20y + 0,25 = x$$

Retranchant l'équation (2) de l'équation [1] il viendra :

$$0,05y - 0,35 = 0$$

Ou $0,05y = 0,35$ d'où $y = \frac{0,35}{0,05} = 7$

par suite $x = 1^f,65$

La somme cherchée est donc $1^f,65$ et le nombre des pauvres, 7.

Problème 217.

On a rempli en 12 minutes un vase contenant 39 litres d'eau en faisant couler successivement deux fontaines, dont l'une fournissait 4 litres par minute et l'autre 3. On demande pendant combien de minutes chaque fontaine a coulé ?

Pour résoudre ce problème il suffira de désigner par x le nombre de minutes pendant lesquelles la première fontaine a coulé et y le nombre de minutes pour la seconde. L'énoncé nous fournit le système des deux équations suivantes :

$$[1] \quad x + y = 12$$
$$[2] \quad 4x + 3y = 39$$

De l'équation [1] on tire :

$$x = 12 - y$$

Substituant cette valeur de y dans l'équation [2] il viendra :

$$4(12 - y) + 3y = 39$$

Digitized by Google

Ou bien :

$$48 - 4y + 3y = 39$$

Ou encore :

$$-4y + 3y = 39 - 48$$

D'où :

$$y = 9' \text{ et par suite : } x = 3'.$$

Problème 218.

Un marchand a deux espèces de Thé ; la première à 14 f. le kilogramme, la deuxième à 18 f. combien doit-il prendre de chacune pour en former une caisse de 100 kilogrammes qui vaille 1680 f. ?

Désignons par x la quantité qu'il faut prendre de la première espèce de thé et y celle de la seconde. On aura évidemment les deux équations

$$[1] \quad x + y = 100$$
$$[2] \quad 14x + 18y = 1680;$$

De l'équation [1] on tire :

$x = 100 - y$, substituant cette valeur dans la deuxième équation, il viendra :

$$14(100 - y) + 18y = 1680$$

Ou :

$$1400 - 14y + 18y = 1680$$

Ou encore :

$$4y = 280$$

D'où $y = \frac{280}{4} = 70$ par suite : $x = 30$

Il faut donc prendre :

30 Kilog. de la première espèce
et 70 Kilog. de la deuxième espèce.

Digitized by Google

Problème 219.

Trois frères ont acheté un bien pour 50,000 f; il manque au premier pour payer à lui seul cette acquisition, la moitié de l'argent qu'a le second; celui-ci payerait l'acquisition à lui seul, si l'on ajoutait à ce qu'il possède, le tiers de ce qu'a le premier; enfin le troisième aurait besoin pour faire ce même paiement de joindre à ce qu'il a, le quart de ce que possède le premier. Combien chacun a-t-il d'argent ?

Désignons par :

x ... ce que possédait le premier
y .... id ..... le second
z .... id ..... le troisième

Le problème se résoudra en traduisant l'énoncé, ainsi qu'il suit :

$$[1] \quad x + \frac{y}{2} = 50,000$$
$$[2] \quad y + \frac{x}{2} = 50,000$$
$$[3] \quad z + \frac{x}{4} = 50.000$$

Chassant les dénominateurs le système de ces trois équations deviendra :

$$[4] \quad 2x + y = 100,000$$
$$[5] \quad 3y + x = 150.000$$
$$[6] \quad 4z + x = 200.000$$

De l'équation [4] on tire :

$$x = \frac{100.000 - y}{2}$$

Substituant cette valeur dans les équations [5] et [6], nous aurons :

$$3y + \frac{100,000 - y}{2} = 150.000$$

$$4z + \frac{100.000 - y}{2} = 200.000$$

Ou bien en chassant les dénominateurs :

$$6y + 100.000 - y = 300.000$$
$$8z + 100.000 - y = 400.000$$

Digitized by Google

Ou encore :

$$5y = 200.000$$
$$8z - y = 300.000$$

La première de ces deux dernières équations donne :

$$y = \frac{200.000}{5} = 40..000$$

Substituant cette valeur de y dans la seconde, il viendra :

$$8z - 40.000 = 300.000$$

Ou :

$$8z = 340.000 \quad \text{d'où } z = \frac{340.000}{8} = 42500$$

Par suite :

$$y = 40.000 \; ; \quad x = 30.000.$$

Il est facile de vérifier l'exactitude de ces valeurs.

Résolution des Equations du deuxième degré à une seule inconnue.

Problème 220.

Résoudre l'Equation :

$$x^2 + 6x = 27$$

On tire immédiatement :

$$x = 3 \pm \sqrt{9 + 27}$$
$$x = -3 \pm \sqrt{36}$$

ou $\quad x = -3 \pm 6$

Par suite ; $x' = 3$; $x'' = 9$.

Problème 221

Résoudre l'Equation :

Digitized by Google

$$x^2 - 7x + 3\tfrac{1}{4} = 0$$

On tire de suite :

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{13}{4}}$$

Ou :

$$x = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{36}{4}}$$

Ou encore :

$$x = \frac{7}{2} \pm \frac{6}{2}$$

Par suite :

$$x' = 6\tfrac{1}{2} \; ; \; x'' = \tfrac{1}{2}$$

Problème 222.

Résoudre l'Equation :

$$3x^2 - 2x = 65$$

L'Equation proposée peut s'écrire :

$$x^2 - \frac{2}{3}x = 65$$

D'où :

$$x = \frac{2}{6} \pm \sqrt{\frac{4}{36} + 65}$$

Ou bien

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2344}}{6}$$

On tire de là :

$$x' = 5 \; ; \; x'' = -4\tfrac{1}{3}$$

Problème 223.

Résoudre l'Equation :

$$x^2 - 8x = 14$$

On tire immédiatement :

$$x = 4 \pm \sqrt{16 + 14}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{30}$$

Ce qui donne en effectuant : $x = 9,4772$; $x'' = 14.772$.

Digitized by Google

Problème 294.

« Résoudre l'équation littérale :

$$ax^2 + b^3 = cx^2 + d^3.$$

En faisant passer cx^2 dans le premier membre et b^3 dans le second membre, il viendra :

$$ax^2 - cx^2 = d^3 - b^3$$

Ou bien :

$$(a-c)\,x^2 = d^2 - b^3$$

D'où enfin :

$$x^2 = \frac{d^3 - b^3}{a-c}$$

Par suite :

$$x = \pm\sqrt{\frac{d^3 - b^3}{a-c}}$$

Problème 295.

« Résoudre l'équation :

$$\frac{54x}{x-6} = 96\,\frac{(x-6)}{x}$$

Chassant les dénominateurs il viendra :

$$54x^2 = 96\,(x-6)\,(x-6)$$

Les nombres 54 et 96 étant tous deux divisibles par 6, ce résultat se simplifie ; on trouve :

$$9x^2 = 16\,(x-6)\,(x-6)$$

« Mais remarquons que les deux membres se présentent sous la forme de carrés ; car il est facile de voir que $9x^2$ est le carré de $3x$ et que $16(x-6)(x-6)$ est le carré de $4(x-6)$; on aura donc tout de suite :

$$3x = \pm 4\,(x-6)$$

D'où :

$$3x = 4x - 24, \text{ par suite : } x = 24$$

$$3x = -4x + 24, \text{ par suite : } x = \frac{24}{7}$$

Digitized by Google

Problème 226.

Résoudre l'Equation :

$$\frac{55,000}{100+7x} + \frac{72000}{100+4x} = 1200$$

On peut diviser les deux membres de cette Equation, ce qui donne :

$$\frac{275}{100+7x} + \frac{360}{100+4x} = 6$$

Faisant disparaître les dénominateurs, on aura successivement :

$$27500 + 1100x + 36000 + 2520x = 60.000 + 6600x + 168x^2$$

Ou bien :

$$27500 + 1100x + 36000 + 2520x = 60.000 + 6600 + 168x^2$$

Ce qui se réduit à :

$$168x^2 + 2980x = 3500$$

Divisant tous les termes par 2, on aura :

$$84x^2 + 1490x = 1750$$

Ce qui donne enfin :

$$x^2 + \frac{1490}{84}x = \frac{1750}{84}$$

D'où :

$$x = 745 \pm \sqrt{\left(\frac{745}{84}\right)^2 + \frac{1750}{84}}$$

On tire facilement :

$$x' = \frac{745}{84} + \frac{837869}{84} = \frac{92869}{84}$$

$$x'' = -745 - \frac{837869}{84} = -\frac{1582869}{84}$$

Problème 227.

Résoudre l'Equation :

$$\frac{a}{x-a} + \frac{b}{x-b} + \frac{c}{x-c} = 0$$

Digitized by Google

Faisant disparaître les dénominateurs de cette Equation il viendra :

$$a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-a)(x-b)=0$$

En effectuant, réduisant et ordonnant, on aura ensuite :

$$(a+b+c)x^2-2(ab+bc+ac)x+3abc=0$$

D'où :

$$x=\frac{ab+bc+ac\pm\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-(a+b+c)abc}}{a+b+c}$$

Ou bien :

$$x=\frac{ab+bc+ac\pm\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2-(a+b+c)abc}}{a+b+c}$$

Problème 228.

Résoudre l'Equation :

$$2x^2-11x+20=0$$

On tire immédiatement :

$$x=\frac{11\pm\sqrt{121-4.2.20}}{4}=\frac{11\pm\sqrt{-39}}{4}$$

Par suite :

$$x'=\frac{11+\sqrt{39}\sqrt{-1}}{4}\qquad x=\frac{11-\sqrt{39}\sqrt{-1}}{4}$$

Problème 229.

Résoudre l'Equation littérale :

$$\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$$

Chassant les dénominateurs, transposant et ordonnant on arrive à l'Equation suivante :

$$(a-b)^2x^2-(a^2+b^2)(a+b)x+ab(a+b)^2=0$$

d'où on tire :

Digitized by Google

$$x = \frac{(a^2+b^2)(a+b) \pm \sqrt{(a^2+b^2)^2(a+b)^2 - 4ab(a+b)^2(ab)^2}}{2(a-b)^2}$$

Ou bien :

$$x = \frac{(a+b)\{a^2+b^2 \pm \sqrt{(a-b)^4 + 4a^2b^2}\}}{2(a-b)^2}$$

Problème 230.

Résoudre l'Equation :

$$3x^2 + 14x - 440 = 0$$

On tire immédiatement :

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 1320}}{} = \frac{-7 \pm \sqrt{1369}}{}$$

$$x = \frac{-7 \pm 37}{3}$$

Par suite

$$x' = \frac{-7+37}{3} = 10$$

$$x'' = \frac{-7+37}{3} = -\frac{44}{3}$$

Résolution des Equations du deuxième degré à plusieurs inconnues.

Problème 231.

Résoudre les Equations :

$$[1] \quad x^2 + y^2 = a$$

$$[2] \quad x^2 - y^2 = b$$

Additionnant et retranchant membre à membre, il viendra : $2x^2 = a+b$; $2y^2 = a-b$

$$x^2 = \frac{a+b}{2} ; \quad y^2 = \frac{a-b}{2}$$ d'où :

Digitized by Google

D'où:

$$x = \pm\sqrt{\frac{a+b}{2}} \; ; \; y = \pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}$$

Problème 232

Résoudre les équations:

$$[1] \quad x+y = a$$
$$[2] \quad xy = b$$

On démontre dans les traités d'algèbre que quand on connaît la somme de deux quantités et leur produit on obtient ces quantités en calculant les racines de l'équation du second degré qui a pour coefficients de x la somme des quantités changée de signe et pour terme tout connu le produit de ces mêmes quantités. On aura donc à résoudre l'équation:

$$z^2 - az + b = 0$$

D'où:

$$z = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

Problème 233.

Résoudre les équations:

$$[1] \quad x+y = 100$$
$$[2] \quad x^2+y^2 = 5018$$

Pour résoudre ces équations, élevons d'abord l'équation [1] au carré il viendra:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 10000$$

Retranchons cette équation [2] on aura

Digitized by Google

$$x^2 + 2xy + y^2 = 10000$$
$$x^2 + y^2 = 5018.$$

$$2xy = 4982$$
$$xy = \frac{4982}{2} = 2491$$

Nous sommes ramené ainsi à la question précédente. On connaît en effet la somme $x + y = 100$ et le produit $xy = 2491$. Nous aurons donc les quantités x et y en calculant les racines de l'Equation :

$$x^2 - 100x + 2491 = 0$$

D'où :

$$x = 50 \pm \sqrt{2500 - 2491}$$
$$= 50 \pm \sqrt{9} = 50 \pm 3$$
$$x' = x = 53 ; \quad x'' = y = 47$$

Problème 234.

Résoudre les deux Equations :

$$[1] \quad x + y = 63$$
$$[2] \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2,05$$

Chassons les dénominateurs de l'Equation [2]. Cette équation devient :

$$[3] \quad x^2 + y^2 = 2,05\, xy$$

Elevons au carré les deux membres de l'équation [1], nous aurons :

$$x^2 + y^2 + 2xy = 3969$$

D'où :

$$[4] \quad x^2 + y^2 = 3969 - 2xy$$

Nous aurons en vertu de l'Equation : [3] :

$$2,05\, xy = 3969 - 2xy$$

Ou bien :

$$(2,05 + 2)\, xy = 3969.$$

Digitized by Google

Ou encore :

$$4{,}05\, xy = 3969$$

D'où :

$$xy = \frac{3969}{4{,}05} = 980$$

Nous connaissons la somme $x + y = 63$

Et le produit $xy = 980$

On aura donc comme dans les questions précédentes à résoudre l'Equation :

$$x^2 - 63x + 980 = 0$$

d'où :

$$x = \frac{63}{2} \pm \sqrt{\frac{3969}{4} - 980}$$

Ou bien :

$$x = \frac{63 \pm \sqrt{3969 - 3920}}{2}$$

$$x = \frac{63 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{63 \pm 7}{2}$$

Donc :

$$x' = x = \frac{63 + 7}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

$$x'' = y = \frac{63 - 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

Problème 235.

Résoudre les Equations :

$$[1] \quad xy = 80$$

$$[2] \quad 3xy + y^2 - x^2 = 9$$

De l'Equation [1], on tire :

$$y = \frac{80}{x}$$

En substituant cette valeur de y dans l'Equation [2], on obtient :

$$240 + \frac{6400}{x^2} - x^2 = 9$$

Ou bien :

$$x^4 - 231x^2 - 6400 = 0$$

Digitized by Google

On tire :

$$x^2 = \frac{231}{2} \pm \sqrt{\frac{53361 + 25600}{4}} = \frac{231 \pm 281}{2}$$

Ensuite :

$$x = \sqrt{256}$$

D'où enfin :

$$x = \pm 16 \; ; \; y = \pm 5$$

Problème 236

Résoudre les Equations :

$$[1] \quad 2x^2 + 3y^2 = 37$$
$$[2] \quad 3xy = 5$$

Calculer les valeurs des inconnues à 0,001 près.

De l'Equation [2] on tire :

$y = \frac{5}{3x}$. Et en substituant cette valeur dans la première on obtiendra :

$$2x^2 + \frac{3 \times 5^2}{(3x^2)} = 37$$

D'où :

$$x^4 - \frac{111}{6} x^2 + \frac{25}{6} = 0$$

On tire :

$$x = \sqrt{\frac{111}{12} \pm \sqrt{\left(\frac{111}{12}\right)^2 - \frac{25}{6}}} = \sqrt{11 \pm 108,263567}$$

Ce qui donnera deux valeurs :

$$x' = \sqrt{\frac{219,263567}{12}} = \sqrt{18,271810} = 4,274 \; ; \; y' = 0,389$$

$$x'' = \sqrt{\frac{2736433}{12}} = \sqrt{0,228036} = 0,477 \; ; \; y'' = 3,511$$

Digitized by Google

Problème 237.

Résoudre les deux Equations suivantes :

$$[1] \quad 5y^2 + 3x^2 = 30752$$
$$[2] \quad 9y - 5x = 424$$

De l'Equation [2] on tire :

$$y = \frac{324 + 5x}{9}$$

En substituant dans l'Equation [1], on obtient :

$$\frac{5(424 + 5x)^2}{9} + 3x^2 = 30752$$

Ce qui conduit après avoir effectué tous les calculs à :

$$368\,x^2 + 21200\,x - 1592032 = 0$$

D'où :

$$x = \frac{10600}{368} \pm \sqrt{\left(\frac{10600}{368}\right)^2 + \frac{1592032}{368}} = \frac{10600}{368} \pm \frac{26424}{368}$$

D'où :

$$x' = 43 \; ; \; y' = 71$$
$$x'' = -\frac{17024}{368} \; ; \; y'' = -\frac{3232}{368}$$

Problème 238.

Résoudre :

$$[1] \quad x^2 - y^2 = 180$$
$$[2] \quad x - y = 6$$

La première Equation peut s'écrire :

$$(x + y)(x - y) = 180$$

Divisant membre à membre la seconde des Equations proposées, il vient :

$$x + y = \frac{180}{6} = 30$$

On aura donc en vertu d'un Théorème connu :

Digitized by Google

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} = 15 + 3 = 18$$

$$y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2} = 15 - 3 = 12$$

Telles sont les valeurs de x et de y qui satisfont aux Equations proposées.

Problème 239.

Résoudre les deux Equations :

$$[1] \quad 2x + y = 1$$

$$[2] \quad \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 1$$

De la première Equation on tire :

$$y = 1 - 2x$$

En substituant la Deuxième Devient :

$$\frac{3}{x} + \frac{2}{1-2x} = 1$$

Faisant disparaître les dénominateurs, réduisant et transposant on arrive à l'Equation du second degré :

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

Résolvant on a

$$x' = \frac{3}{2} \quad x'' = 1$$

Par suite on aura pour y les deux valeurs :

$$y' = -2 \; ; \; y'' = -1$$

Problème 240

Calculer à 0,01 près les valeurs de x et y qui satisfont aux Equations :

$$[1] \quad 2x^2 - 3y^2 = 7584$$

$$[2] \quad xy = 8529$$

De la seconde Equation, on tire :

$$y = \frac{8529}{x}.$$

Digitized by Google

Substituons cette valeur dans l'Equation [1] il viendra :

$$2x^2 - \frac{3}{2}(8529)^2 = 7584$$

D'où : $2x^4 - 3792\,x^2 - \frac{3}{2}(8529)^2 = 0$

$$x^2 = 1896 \pm \sqrt{1896^2 + \frac{3}{2}(8529)^2}$$

Par suite :

$$x^2 = \sqrt{1896 + \sqrt{11271057,5}} = \sqrt{12512,5238} = 111,86$$

D'où :

$$y = 76,24.$$

Problème 241

Résoudre les Equations :

$$[1] \quad x + y = \frac{21}{8}$$

$$[2] \quad \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{35}{6}$$

De la première équation on tire :

$y = \frac{21}{8} - x$ Cette valeur substituée dans la seconde donne :

$$\frac{x}{\frac{21}{8} - x} - \frac{\frac{21}{8} - x}{x} = \frac{35}{6}$$

Ou bien :

$$x^2 - \left(\frac{21}{8} - x\right)^2 = \frac{35}{6}\left(\frac{21}{8}x - x^2\right)$$

Ce qui donne :

$$x^2 - \frac{69}{40}x - \frac{378}{320} = 0$$

D'où on tire :

$$x = \frac{69}{80} \pm \sqrt{\left(\frac{69}{80}\right)^2 + \frac{378}{320}} = \frac{69 \pm 111}{80}$$

Ce qui donne deux systèmes de valeurs :

$$x = \frac{18}{18} \; ; \; y = \frac{3}{8}$$

$$x = \frac{42}{80} \; ; \; y = \frac{252}{80}$$

Digitized by Google

Problème 242.

Déterminer la nature des Racines des deux Équations :

$$[1] \quad 5(x+y) = xy$$

$$[2] \quad 2x + 3y = 40$$

De la Deuxième Équation on tire :

$$x = \frac{40 - 3y}{2}$$

Substituant cette valeur dans l'Équation [1], on obtient :

$$5\left(\frac{40-3y}{2} + y\right) = y\left(\frac{40-3y}{2}\right)$$

Ou bien :

$$5(40-y) = y(40-3y)$$

D'où on tire facilement :

D'où enfin : $$y^2 - 15y + \frac{200}{3} = 0$$

$$y = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{200}{3}}$$

Ou bien :

$$y = \frac{15}{2} \pm \sqrt{-\frac{125}{12}}$$

On aura donc :

$$x = \frac{35 \mp 6\sqrt{-\frac{125}{12}}}{4}$$

Ces valeurs sont, comme on le voit, imaginaires.

Problème 243.

Résoudre les deux Équations :

$$[1] \quad \frac{5x-2}{4-3y} = \frac{1}{2}$$

$$[2] \quad \frac{3x+5}{y-1} = \frac{2}{3}$$

De ces deux Équations on déduit les deux suivantes :

$$10x + 3y = 8 \; ; \; 2y - 9y = 17$$

De la Deuxième on tire :

Digitized by Google

$$y = \frac{17 + 9x}{2}$$

Substituant cette valeur dans la première il vient :

$$10x + \frac{3(17 + 9x)}{2} = 8$$

Ou bien :

$$20x + 51 + 27x = 16$$

Ou encore :

$$47x = -35$$

D'où :

$$x = -\frac{35}{47}$$

Par suite :

$$y = \frac{242}{47}$$

Problème 244.

Résoudre le système des Equations :

$$[1] \quad x^4 + y^4 = 0,8$$

$$[2] \quad xy = 0,5$$

et calculer à l'aide des tables de logarithmes et avec l'approximation qu'elles comportent, les valeurs des systèmes obtenus.

De la deuxième Equation on tire :

$y = \frac{0,5}{x}$ Et substituant cette valeur dans l'Equation [1] on obtient :

$$x^4 + \frac{0,0625}{x^4} = 0,8$$

Ou bien :

$$x^8 - 0,8\,x^4 + 0,0625 = 0$$

Posons : $x^4 = z$, il viendra alors :

$$z^2 - 0,8z + 0,0625 = 0$$

D'où :

$$x = 0,4 \pm \sqrt{0,16 - 0,0625} = 0,4 \pm 0,3122249$$

$$x = 0,7122249$$

Digitized by Google

Par suite :

$$x = \sqrt[4]{0,712249}$$

et :

$$y = \sqrt[4]{0,087751}$$

En effectuant au moyen des logarithmes on trouve :

$$x = 0,918667 ; y = 0,544267.$$

Problème 245.

Résoudre l'Équation :

$$\frac{a-b}{4(x-a)} + \frac{2b-x}{a+b} = 2$$

Réduisant tous les termes au même dénominateur, on obtient :

$$-4x^2 + 4ax + b^2 - a^2 = 0$$

D'où :

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{b^2+a^2}{4}}$$

Ou :

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{2a^2 - b^2 + a}}{2}$$

D'où :

$$x' = \frac{-a + \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}$$

$$x'' = \frac{-a - \sqrt{2a^2 - b^2}}{2}$$

Problème 246.

Résoudre le système des Équations :

$$[1] \quad \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}$$

$$[2] \quad x - y = 2b.$$

Digitized by Google

Il est facile de voir que la première Équation donne :

$$x^2+y^2=\frac{2(a^2+b^2)}{a^2-b^2}xy$$

De la seconde Équation on tire :

$$y=x-2b$$

Substituant cette valeur, il vient :

$$x^2-2bx-a^2+b^2=0$$

D'où :

$$x=b\pm\sqrt{b^2+a^2-b^2}=b\pm a$$

Par suite :

$$y=\pm a-b$$

Problème 247.

Résoudre l'Équation :

$$\frac{2x+4a}{a+b}-\frac{a-b}{2(x-b)}=4$$

Chassant les dénominateurs et réduisant, il viendra

$$x^2-3bx-\frac{a^2-9b^2}{4}=0$$

D'où :

$$x=\frac{3b\pm\sqrt{a^2}}{2}=\frac{3b\pm a}{2}$$

Donc :

$$x'=\frac{3b+a}{2}\ ;\quad x''=\frac{3b-a}{2}$$

Problème 248.

Résoudre l'Équation :

$$[1]\ (x^2-6x+6)(x^2-9x+20)=0$$

Et calculer les racines à moins d'un millième près

Égalons les deux facteurs de l'Équation proposée à zéro, il viendra :

Digitized by Google

[2] $x^2 - 6x + 6 = 0$

[3] $x^2 - 9x + 20 = 0$

En résolvant ces deux Equations on obtiendra les 4 valeurs de x qui satisfont à l'équation proposée.

On a :

$x' = 3 \pm \sqrt{3} = 4{,}732$ et $1{,}268$

$x = 4{,}5 \pm \sqrt{0{,}25} = 4$ et 5.

Problème 249.

Résoudre l'Equation :

[1] $$\frac{2b^2 x}{3x+b} = \frac{a^2(3x-b}{2(x+a)}$$

Chassant les dénominateurs et réduisant on obtient :

$$x^2 - \frac{4ab^2}{9a^2-4b^2}x - \frac{a2b^2}{9a^2-4b^2} = 0$$

D'où :

$$x = \frac{2ab^2}{9a^2 4b^2} \pm \sqrt{4a^2b^4 + 9a^4b^2 - 4a^2b^4}$$

$$x = \frac{2ab^2 \pm 3a^2b^2}{9a^2 - 4b^2}$$

Problème 250.

Résoudre l'Equation :

$$\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$$

Elevons au carré les deux membres de cette Equation, on a :

$$1 - \sqrt{x^4 - x^2} = x^2 - 2x + 1$$

D'où : $x^2 - 2x = -\sqrt{x^4 - x^2}$

Elevons une fois de plus au carré il vient :

Digitized by Google

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = x^4 - x^2$$

On:

$$4x^3 - 5x^2 = 0$$

Ce qui donne deux valeurs de:

$$x = 0 \quad \text{et} \quad x = \frac{5}{4}$$

Problème 251

Résoudre l'Equation:

$$x^3 + \frac{216}{x^3} = 35$$

Cette Equation peut s'écrire:

$$x^6 + 216 = 35x^3$$

Ou bien:

$$x^6 - 35x^3 = -216$$

Posons: $x^3 = u$ On aura:

$$u^2 - 35u = 216$$

D'où:

$$u = \frac{35}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{35}{2}\right)^2 - 216}$$

En effectuant on trouve:

$$x^3 = u' = \frac{35}{2} + \frac{19}{2} = \frac{54}{2} = 27.$$

$$x^3 = u'' = \frac{35}{2} - \frac{19}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

D'où:

$$x = \sqrt[3]{27} = 3; \quad x = \sqrt[3]{8} = 2$$

Problème 252

Résoudre le système de deux Equations suivantes:

$$[1] \quad x^2y + xy^2 = 30$$

$$[2] \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$$

Digitized by Google

Chassons les dénominateurs de l'Équation [2], on pourra écrire le système, ainsi qu'il suit :

$$[1] \quad xy(x+y) = 30$$

$$[4] \quad 6(x+y) = 5xy$$

Posons :

$$v = x+y \; ; \; u = xy$$

Il viendra :

$$[5] \quad uv = 30$$

$$[6] \quad 6v = 5u$$

L'Équation [6] donne $v = \frac{5u}{6}$, substituant dans l'Équation [5], on aura :

$$\frac{5}{6} u^2 = 30$$

D'où :

$$u^2 = 36$$

On tire :

$$u = \pm 6 \text{ par suite : } v = \pm 5$$

Prenons d'abord les valeurs $u = 6$ $v = 5$ on aura :

$$x+y = 5$$

$$xy = 6$$

D'où l'on déduit facilement :

$$x = 2 \text{ et } y = 3$$

Si on prenait les valeurs : $u = -6$ $v = 5$, on aurait :

$$x+y = -5$$

$$xy = -6$$

D'où l'on déduit :

$$x = -6 \text{ et } y = 1$$

Problème 253

Résoudre le système :

$$[1] \quad x^3 + y^3 + x^2y + y^2x = 13$$

$$[2] \quad x^4y^2 + x^2y^4 = 468$$

Digitized by Google

Equations qu'on peut écrire, ainsi qu'il suit :

$$[3] \quad (x+y)(x^2+y^2) = 13$$

$$[4] \quad x^2y^2(x^2+y^2) = 468$$

Divisant l'Equation [4] par l'Equation [3] il vient :

$$x^2y^2 = 36(x+y)$$

Equation qui peut remplacer l'une des précédentes.

Désignons maintenant le produit xy par u et la somme $x+y = v$, il viendra :

$$[5] \quad v(v^2 - 2u) = 13$$

$$[6] \quad u^2 = 36v$$

Eliminant v entre ces deux Equations, on a :

$$\frac{u^6}{36} - \frac{2u^3}{36} - 13 = 0$$

D'où l'on tire :

$$\frac{u^3}{36} = 36 \pm \sqrt{36^2 + 13.36}$$

$$u = -6 \qquad u = 6\sqrt[3]{13}$$

$$v = 1 \qquad v = \sqrt[3]{13}$$

Le premier système de solution est donné par l'Equation :

$$z^2 - z - 6 = 0$$

Par suite :

$$x = 3 \qquad y = -2$$

Le second système est donné par l'Equation :

$$z^2 - \sqrt[3]{13^2}\,z + 6\sqrt[3]{13} = 0$$

D'où l'on conclut :

$$x = \frac{\sqrt[3]{13^2} + \sqrt{-11\sqrt[3]{13}}}{2}; \quad y = \frac{\sqrt[3]{13^2} - \sqrt{-11\sqrt[3]{13}}}{2}.$$

Problème 254.

Résoudre :

$$[1] \quad x + y = 5$$

$$[2] \quad x^3 + y^3 = 56,6$$

Digitized by Google

Elevons la première Equation au cube, nous obtiendrons :

$$[3]\quad x^3+y^3+3\,xy(x+y)=125$$

Remplaçons x^3+y^3 et $x+y$ par leurs valeurs tirées des Equations [1] et [2], nous obtiendrons toutes réductions faites :

$$xy=4,56$$

Nous connaissons maintenant la somme 5 et le produit 4,56 des deux inconnues x et y. Pour obtenir leurs valeurs il suffit de résoudre :

$$X^2-5X+4,56=0$$

D'où

$$X=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}+4,56}$$

Par suite :

$$x=3,8\ ;\ y=1,2$$

Problème 255.

Résoudre les Equations :

$$[1]\quad x+y+z=195$$
$$[2]\quad z-x=120$$
$$[3]\quad \frac{x}{y}=\frac{y}{z}$$

De l'équation [2] on tire : $z=120+x$

Substituons dans l'Equation [1] il vient :

$$x+y+120+x=195$$

Ou bien :

$$2x+y+120=195$$

On tire de cette dernière Equation :

[4] $y=75-2x$. Remplaçons dans l'Equation [3] z et y par leurs valeurs, il vient :

$$x(120+x)=(75-2x)^2$$

Ou bien : $120x+x^2=75^2-75.4.x+4x^2$.

Digitized by Google

Ou encore :

$$3x^2 - 420x + \overline{75}^2 = 0$$

Ou plus simplement :

$$x^2 - 140 + 1875 = 0$$

d'où :

$$x = 70 \pm \sqrt{4900 - 1875} = 70 \pm \sqrt{3025}$$

$$x = 70 \pm 55$$

$x = 70 + 55 = 125$ par suite : $y = 175$; $z = 245$

$x = 70 - 55 = 15$ par suite : $y = 45$; $z = 135$

Problème 256.

Résoudre l'équation :

$$x^4 + 1 = 0$$

L'équation proposée peut s'écrire :

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 2x^2.$$

Ou : $(x^2+1)^2 - 2x^2 = 0$

Ce qu'on peut écrire :

$$(x^2 + 1 + x\sqrt{2})(x^2 + 1 - x\sqrt{2}) = 0$$

Par suite l'équation proposée est décomposable en deux équations du deuxième degré :

$$x^2 + x\sqrt{2} + 1 = 0 ; \quad x^2 - x\sqrt{2} + 1 = 0$$

Ces deux équations, comme on le voit, ne diffèrent que par le signe. Leurs racines sont :

$$x = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}} \quad x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}}$$

Ce sont les quatre racines de l'équation proposée.

Problème 257.

Résoudre l'équation :

$$x^8 + 1 = 0$$

Digitized by Google

L'équation proposée peut s'écrire :

$$x^8 + 2x^4 + 1 = 2x^4$$

Ou bien :

$$(x^4+1)^2 - 2x^4 = 0$$

Elle se décompose en deux autres :

$$x^4 + 1 + x^2\sqrt{2} = 0 \quad \text{et} \quad x^4 + 1 - x^2\sqrt{2} = 0$$

Équations bicarrées qu'on résout facilement. On a :

$$x = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}} \; ; \; x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-2}}{2}}$$

qui donnent les racines de l'équation proposée.

Questions sur les Maxima et les Minima dont la solution dépend de la résolution des équations du deuxième degré.

Problème 258.

Quel est le plus grand rectangle qu'on puisse inscrire dans un cercle donné ?

Nommons x et y les côtés du rectangle, R le rayon du cercle donné, il nous faut rendre maximum le produit xy ; d'ailleurs on a, entre les quantités x, y et R la relation : $x^2 + y^2 = R^2$.

Le produit xy sera maximum en même temps que son carré x^2y^2. Les facteurs x^2 et y^2 ont pour somme constante R^2, le maximum aura donc lieu pour $x^2 = y^2$ ou bien $x = y$. Il est facile de voir alors que le plus grand rectangle qu'on puisse inscrire à un cercle donné

Digitized by Google

est un carré.

Problème 259.

Calculer le maximum et le minimum de l'expression

$$x + \frac{1}{x}$$

Posons:

$$x + \frac{1}{x} = m$$

d'où:

$$x^2 + 1 = m x$$

Ou bien:

$$x^2 - m x + 1 = 0$$

d'où

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - 1}$$

Comme on peut le voir les valeurs de x ne sont réelles qu'autant que dans l'expression:

$$x = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}$$

On aura:

$$m^2 - 4 > 0$$

Ou bien:

$$(m + 2)(m - 2) > \text{ou} = 0$$

Donc le maximum sera égal à -2 et le minimum $+2$.

Problème 260.

L'hypoténuse d'un triangle rectangle ayant une longueur de 35m. 50, on demande de calculer, à un centimètre près les deux côtés de l'angle droit, de manière à rendre

Digitized by Google

la surface du triangle maximum. On évaluera cette surface en ares et en centiares.

Nommons x et y les deux côtés de l'angle droit, on aura d'abord d'après une propriété connue du triangle rectangle :

$$x^2+y^2=\overline{33,5}^2,$$ puis on aura encore la relation :

$$\frac{xy}{2}=m^2$$

m^2 étant la surface qu'il s'agit de rendre maximum. Éliminant y entre ces deux équations, on arrive à la suivante :

$$x^4-\overline{33^m.5}^2x^2+4m^4=0$$

d'où :

$$x=\sqrt{\frac{\overline{33.5}^2}{2}\pm\sqrt{\frac{\overline{33.5}^4}{4}-4m^4}}$$

La plus grande valeur qu'il puisse prendre m^2 est donnée par l'Équation :

$$\frac{\overline{33.5}^4}{4}=4m^4$$

d'où :

$$m^2=\frac{\overline{33.5}^2}{4}$$

Elle correspond à la valeur :

$$x=y=\sqrt{\frac{\overline{33,5}^2}{2}}=23^m,69$$

Par suite en désignant par S la surface demandée, on aura :

$$S=2^{\text{ares}}.81 \text{ Centiares}$$

Problème

Digitized by Google

Problème 261.

Quelle est la surface maximum parmi les triangles de même périmètre et de même base? Cas où les triangles sont seulement isopérimètres.

La surface S d'un triangle quelconque est donnée par la formule:

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

Dans le cas où les triangles ont même base et même périmètre; les facteurs p et $p-a$ sont évidemment constants, en prenant a pour base. La surface ne devra donc varier qu'avec les deux facteurs $(p-b)$ et $(p-c)$. La somme de ces derniers facteurs est constante car:

$$2p-b-c = a$$

Or, on sait, que pour qu'un produit de deux facteurs dont la somme est constante, soit maximum il faut que ces deux facteurs soient égaux, on devra donc avoir:

$$p-b = p-c$$

Ou:

$$b = c$$

ce qui indique un triangle isocèle.

Dans le second cas, la somme des trois facteurs: $(p-a)$; $(p-b)$; $(p-c)$; est constante, car:

$$(p-a)+(p-b)+(p-c) = 3p-a-b-c = p$$

Pour que le produit soit maximum, il faut encore que tous ces facteurs soient égaux; on aura donc:

$$p-a = p-b = p-c$$

Ou bien:

$$a = b = c$$

Ce qui indique un triangle équilatéral.

Problème

Digitized by Google

Problème 262.

La somme des côtés de deux cubes est égale à 5^{m} et la somme de leurs volumes à $56^{mc}.6$. On propose de calculer les longueurs des deux côtés. La somme des côtés restant constante, quel est le minimum au dessous duquel la somme des volumes ne saurait tomber ?

1° Désignons par x et y les longueurs des deux côtés, on aura évidemment entre les quantités les relations :

$$[1] \quad x + y = 5$$

$$[2] \quad x^3 + y^3 = 56.6$$

Elevons la première au cube, on obtiendra :

$$[3] \quad x^3 + y^3 + 3xy\,(x+y) = 125$$

Remplaçons maintenant $x^3 + y^3$ et $x + y$ par leurs valeurs tirées des équations [1] et [2], on trouve après quelques réductions :

$$xy = 4,56$$

On connaît la somme $x + y = 5$ et le produit $xy = 4,56$.

Pour obtenir chacune des quantités, il suffira de calculer les racines de l'équation :

$$X^2 - 5X + 4,56 = 0$$

On en déduit facilement :

$$x = 3,8 ; \quad y = 1,2$$

2° Il s'agit de trouver le minimum de l'expression :

$$x^3 + y^2$$

avec la condition : $x + y = 5$

Considérons l'équation [3]. On en tire sans difficulté :

$$x^3 + y^3 = 125 - 15\,xy$$

Digitized by Google

Ce qui nous fait voir que le minimum de la somme des volumes correspond au maximum du rectangle que l'on peut construire avec les côtés x et y des deux cubes. Ce maximum a lieu pour :

$$x = y = \frac{5}{2}$$

Le minimum demandé a par suite pour valeur : (Cette valeur étant évaluée en mètres cubes)

$$2.\left(\frac{5}{2}\right)^3 \text{ ou en effectuant : } 31^{mc},350.$$

Problème 263.

Quel serait le maximum du produit :

$$(5 - \sin x)(2 + \sin x) ?$$

L'équation $5 - \sin x = 2 + \sin x$ admet-elle une solution ?

Pour résoudre cette question, nous nous appuierons sur le théorème suivant :

Le maximum du produit de deux quantités dont la somme est constante correspond au minimum de leur différence. Cela posé les deux facteurs du produit :

$$(5 - \sin x)(2 + \sin x)$$

ont une somme constante, en effet :

$$5 - \sin x + 2 + \sin x = 7$$

Ce produit sera donc maximum quand la différence :

$$3 - 2 \sin x$$

des deux facteurs sera minimum, ce qui arrivera quand on aura :

$$\sin x = 1$$

c'est-à-dire pour la plus grande valeur possible de $\sin x$.

L'arc est alors égal à $\frac{\pi}{2}$. Il est impossible d'annuler la différence.

Digitized by Google

3 − 2 sin. x des deux facteurs, ou ce qui est la même chose pour :

5 − sin. x = 2 + sin. x, car alors on tirerait :

$$\sin = \frac{3}{2}$$

valeur inadmissible. Ainsi le maximum du produit considéré a lieu pour :

$x = \frac{\pi}{2}$. Cette valeur maximum est 12.

Problème 264.

On demande le maximum de l'expression :

$$\sin. x \cos^3 x.$$

La valeur absolue de l'expression donnée sera maximum en même temps que celle de son carré $\sin^2 \cos^6 x$ que l'on peut écrire ainsi qu'il suit :

$$\sin^2 x\,(1 - \sin^2 x)^3$$

Il est facile de voir que la somme de deux quantités $\sin^2 x$ et $1 - \sin^2 x$ est constante puisqu'elle est égal à l'unité. Donc en vertu d'un théorème connu la valeur de $\sin^2 x$ pour laquelle l'expression précédente est maximum sera donnée par la relation :

$$\frac{\sin^2 x}{1} = \frac{1 - \sin^2 x}{3}$$

On tire de là :

$$\sin.^2 x = \frac{1}{4}$$

D'où :

$$\sin. x = \frac{1}{2}$$

Et par suite :

$$x = \frac{\pi}{6}.$$

Problème,

Digitized by Google

Problème 265.

La somme de deux nombres est 24; dans quel cas le produit de ces deux membres sera-t-il maximum?

Désignons par x et y les deux membres dont la somme est 24; l'énoncé fournit les deux équations:

$$[1] \quad x + y = 24$$

$$[2] \quad xy = m$$

Mais x et y sont les racines de l'équation du second degré:

$$x^2 - 24x + m = 0$$

D'où:

$$x = 12 \pm \sqrt{144 - m}$$

La valeur de x sera réelle si la quantité placée sous le radical est positif; la plus grande valeur qu'on puisse attribuer à m est $m = 144$, le radical se réduit à zéro et on a alors:

$$x = 12$$

donc:

$$x' = x = 12$$

$$x'' = y = 12$$

Le produit des deux membres est donc maximum quand ces deux membres sont égaux entre eux.

Problème 266.

Décomposer un nombre donné a en deux facteurs dont la somme soit minima.

Nommons x l'un des facteurs, l'autre facteur sera évidemment $\frac{a}{x}$. On aura donc, d'après l'énoncé:

$$[1] \quad x + \frac{a}{x} = m, \quad [2] \quad x \cdot \frac{a}{x} = a$$

Digitized by Google

Comme dans la question précédente, on connaît la somme et le produit de deux facteurs ; On les obtiendra donc en calculant les racines de l'équation :

$$x^2 - mx + a = 0$$

d'où :

$$x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - a}$$

La valeur de x sera réelle, si la quantité placée sous le radical est positive. La plus petite valeur qu'on puisse attribuer à $\frac{m^2}{4}$ est évidemment a on aura donc :

$$\frac{m^2}{4} = a$$

$$m^2 = 4$$

D'où :

$$m = 2\sqrt{a}$$

Le radical s'annule alors, et on obtient :

$$x = \frac{m}{2}$$

Ce qui donne en mettant à la place de m sa valeur trouvée ci-dessus :

$$x = \frac{2\sqrt{a}}{2} = \sqrt{a}$$

$$x = \frac{2\sqrt{a}}{2} = \sqrt{a}$$

Ainsi donc, la somme des deux facteurs sera minima quand ils seront égaux à $\sqrt{a}$.

Problème 267.

Inscrire, dans une sphère dont le rayon est R, un cône dont la surface latérale soit maxima.

La surface latérale du cône ASB (Voy. fig. 41) est donné par la formule comme :

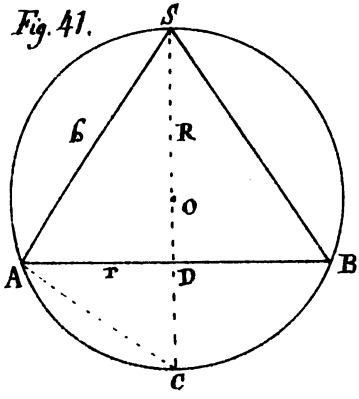
$$S = 2\pi r \frac{h}{2}$$

Ou bien :

$$S = \pi r h$$

Digitized by Google

Fig. 41.



C'est cette surface que nous devons rendre maxima. Le maximum, comme il est facile de le voir, est indépendant du rapport R puisqu'il est constant; il ne peut donc provenir que du produit rh.

Dans le triangle rectangle SAC on a :

$$r^2 = SD \cdot DC$$

Ou bien :

$$[1] \quad r^2 = (R + x)(R - x)$$

x désignant la distance OD.

D'ailleurs :

$$h^2 = SC \cdot SD$$

Ou bien :

$$[2] \quad h^2 = 2R(R + x)$$

On aura donc, en effectuant le produit des équations [1] et [2] :

$$r^2 h^2 = 2R(R + x)^2 (R - x)$$

Le maximum du produit $r^2 h^2$ est indépendant de 2R ; quantité constante, il ne dépend donc que du produit :

$$(R + x)^2 (R - x)$$

Mais la somme :

$$R + x + R - x = 2R$$

est constante. Donc le maximum du produit aura lieu quand les facteurs $(R + x)^2$ et $R - x$ seront entre eux comme leurs exposants.

On aura donc :

$$\frac{R + x}{2} = \frac{R - x}{1}$$

D'où :

$$R + x = 2R - 2x$$

Digitized by Google

D'où on tire enfin.

$$x = \frac{R}{3}$$

La surface latérale du cône inscrit dans la sphère de rayon R sera donc maximum quand la hauteur du cône sera égale au tiers du rayon de la sphère circonscrite augmenté du rayon de la même sphère.

Problème 268.

Quelle est la valeur de x qui rend maximum ou minimum la fonction.

$$\frac{16 - 4x + x^2}{2x + 2} ?$$

Posons:

$$\frac{16 - 4x + x^2}{2x + 2} = m$$

Résolvant par rapport à x, on trouve:

$$x = 2 + m \pm \sqrt{m^2 + 6m - 16} = 2m \pm \sqrt{(m+3)^2 - 25}$$

La valeur minimum de m sera déterminée par la relation:

$(m+3)^2 = 25$ d'où: $m = -3 \mp 5 = 2$ ou -8

Il en résulte pour x, les valeurs:

$$x = 2 + 2 = 4$$

$$x = 2 + (-8) = -6$$

Problème 269

Déterminer x de manière que: $\cos + \sin x$ soit un maximum.

On a d'abord:

$$\cos x + \sin x = m$$

Ou: $\cos x = m - \sin x$

Digitized by Google

Elevant les deux membres de cette égalité au carré, il vient :

$$\cos^2 x = m^2 - 2m \sin x + \sin^2 x$$

Ou bien :

$$1 - \sin^2 x = m^2 - 2m \sin x + \sin^2 x$$

Ou encore :

$$2 \sin^2 x - 2m \sin x = 1 - m^2$$

Divisant les deux membres par 2, il vient :

$$\sin^2 x - m \sin x = \frac{1-m^2}{2}$$

D'où :

$$\sin x = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + \frac{1-m^2}{2}}$$

Ou bien :

$$\sin x = \frac{m \pm \sqrt{2-m^2}}{2}$$

$2 - m^2 = 0$ ou $2 = m^2$ par suite : $m = \sqrt{2}$

Donc :

$$\sin x = \sqrt{\frac{2}{2}}$$

Par conséquent :

$$x = 45.^\circ$$

Autre Solution.

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin(90^\circ - x)$$

Mais remarquons que :

$$\sin x + \sin(90^\circ - x) = 2 \sin 45^\circ \cos(x - 45^\circ)$$

Le facteur $2 \sin 45^\circ$ étant constant, il faut que : $\cos(x - 45^\circ)$ soit maximum, on devra avoir :

$$\cos(x - 45^\circ) = 1$$

Ce qui exige que :

$$x - 45^\circ = 0$$

D'où

$$x = 45^\circ.$$

Digitized by Google

Problèmes d'Algèbre

Questions Diverses.

Problème 270.

Décomposer le nombre 1 en deux parties proportionnelles aux nombres $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$; on calculera la plus grande des deux parties à 0.001 près?

Désignons par x et y les deux parties cherchées x représentant la plus grande et y la plus petite, nous aurons évidemment la relation :

$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{y}{\sqrt{2}}$, Or, on sait que lorsque plusieurs fractions sont égales et qu'on ajoute les numérateurs et les dénominateurs, on forme une nouvelle fraction égale à chacune des fractions proposées, nous pourrons donc écrire : $\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{x+y}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; mais nous savons que : $x + y = 1$ il viendra alors :

$$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{y}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$ D'où on tire facilement :

$$x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} \quad ; \quad y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Problème 271.

De 6 ans à 64, la vie probable est donnée (approximativement) par l'Equation : $y = 59 - \frac{3}{4}x$ [1] dans laquelle x représente l'âge, y la vie probable à

Digitized by Google

quel âge est-on arrivé à la moitié de la vie probable ?

Pour résoudre ce problème, il nous suffira d'égaler dans l'Equation [1] x à $\frac{4}{7}$, ce qui donne : $x = 59 - \frac{3}{4}x$, ou bien en réduisant : $7x = 236$

D'où enfin :

$$x = \frac{236}{7} = 33 \text{ ans} + \frac{5}{7}.$$

Problème 272.

Deux cercles ont pour rayons l'un 20m, l'autre 21m, quel doit être le rayon d'un troisième cercle pour qu'il ait une surface qui soit égale à la somme des surfaces des deux premiers ?

Soit x le rayon inconnu du troisième cercle, l'énoncé du problème fournit immédiatement l'Equation :

$$\pi x^2 = \pi \overline{20}^2 + \pi \overline{21}^2$$

Ou bien :

$$\pi x^2 = \pi (\overline{20}^2 + \overline{21}^2)$$

Supprimant π de part et d'autre on a :

$$x = \overline{20}^2 + \overline{21}^2$$

d'où on tire la valeur x en extrayant la racine carrée suivante :

$$x = \sqrt{\overline{20}^2 + \overline{21}^2} = 29^m.$$

Problème 273.

Partager le nombre 590 en deux parties, dont le produit soit égal au nombre 80464 ?

Représentons par x l'une des deux parties

Digitized by Google

l'autre sera evidemment égale à $590 - x$ on aura alors l'équation suivante :

$$x(590 - x) = 80464$$

On en tire $x = 376$, et par suite l'autre partie est égale à $590 - 376 = 214$. En additionnant les deux nombres 376 et 214 on retrouve bien 590 nombre à partager, en effectuant le produit : 376×214 on trouve ainsi 80464, le problème est donc complètement résolu

Problème 274.

Supposons qu'on ait renfermé dans une cage un certain nombre de lapins et de faisans en tout 35 têtes et 94 pattes. Calculer le nombre des animaux de chaque espèce ? (1)

Désignons par x le nombre des lapins et y celui des faisans, nous aurons à écrire pour la solution du problème les deux Equations suivantes.

$$[1] \quad x + y = 35$$

$$[2] \quad 4x + 2y = 94.$$

De l'Equation [1] on tire :

$$x = 35 - y$$

Substituant cette valeur x dans l'Equation [2] ; il vient :

$$4(35 - y) + 2y = 94$$

On bien :

$$4 \times 35 - 4y + 2y = 94$$

Ou encore en réduisant :

$$2y = 46 \; ; \; y = \frac{46}{2} = 23 ; \quad x = 35 - 23 = 12$$

Il y a donc : 23 faisans et 12 lapins

(1) Voy. Die Arithmetik der Chinesen von Herrn Dr. K. L. Biernatzki zu Berlin. Bor.

Digitized by Google

Problème 275.

5 bœufs et 2 brebis coûtent 10 taels d'or ; 2 bœufs et 8 brebis, 8 taels ; quel est le prix d'un bœuf et celui d'une brebis (2)?

Désignons par x le prix d'un bœuf et y celui d'une brebis, on aura :

$$[1] \quad 5x + 2y = 10$$
$$[1] \quad 2x + 8y = 8$$

Résolvant ces deux équations, on trouve pour :

$$x = 1^{\text{tael}} + \frac{7}{9} \text{ et } y = \frac{5}{9} \text{ de tael}$$

Il est facile de vérifier l'exactitude de ces valeurs.

Problème 276.

Sur une base de 21^{m} construire un triangle rectangle, tel que l'hypoténuse et l'autre côté donne une somme double de cette base ?

Nommons x et y les deux quantités inconnues. Nous aurons pour les déterminer, les deux équations suivantes :

$$[1] \quad x^2 - y^2 = \overline{21}^2$$
$$[2] \quad x + y = 42$$

En divisant ces deux équations membre à membre, on obtient l'équation :

$$[3] \quad x - y = \frac{21}{2}.$$

Les équations [2] et [3] résolvent la question puisqu'on a la somme et la différence des quantités

---

(2) Voy. Die Arithmetik der Chinesen von Herrn Dr K. L. Biernatzki zu Berlin.

Digitized by Google

inconnues.

Nous aurons donc pour :

$$x = 21 + \frac{21}{4} = 26^{m}25$$
$$y = 21 - \frac{21}{4} = 15^{m}.75$$

Problème 277.

Construire un triangle rectangle dont les trois côtés soient 3 nombres entiers consécutifs ?

Si nous représentons par x le petit côté, les deux autres seront évidemment représentés par $x+1$ et $x+2$, et nous aurons alors en vertu d'un théorème connu, la relation suivante :

$$(x+2)^2 = (x+1)^2 + x^2$$

En développant les calculs et réduisant on arrive à l'équation :

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

D'où on tire :

$$x = 1 \pm \sqrt{4}.$$

Les côtés du triangle cherché sont donc enfin :

3, 4, 5.

Problème 278.

Démontrer que la somme des n premiers nombres impairs est égale à n^2 ?

La somme des n premiers nombres impairs est évidemment égale à la somme d'une progression par différence dont le premier terme est 1 (l'unité) le nombre des termes n et la raison 2. Or, on sait

Digitized by Google

que la somme des termes d'une progression par différence égale la moitié du produit que l'on obtient en multipliant la somme des termes extrêmes par le nombre des termes.

Donc pour résoudre la question, il suffira d'écrire l'expression de la somme des termes d'une progression par différence qui est : $S = \frac{a+l}{2} n$; dans laquelle S est la somme, a le premier terme de la progression, l le dernier terme et enfin n le nombre des termes.

Remplaçons maintenant dans l'expression précédente l par sa valeur : $l = a + (n-1) r$; il viendra : $S = \frac{a + a + (n-1) r}{2} n =$

Ou bien en remplaçant les lettres par leur valeur :

$$S = \frac{2 + (n-1) 2}{2} n = n^2$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Problème 279.

Calculer le rayon d'un cercle dont la surface est 35 m.q. ?

Soit R le rayon inconnu, nous savons que la surface du cercle est donnée par la formule :

$$S = \pi R^2$$

Et comme $S = 35$ m.q., il viendra :

$$35 \text{ m.q.} = \pi R^2 \; ; R^2 = \frac{35}{\pi} \text{ m.q.}$$

Donc :

$$R = \sqrt{\frac{35}{\pi}} = 3^{m}.34$$

Problème 280.

Le rayon d'une sphère étant représenté par R, on demande la formule qui exprime le côté du

Digitized by Google

du cube égal à la différence du volume de la sphère et du volume du cylindre circonscrit ?

IV. — On appliquera ensuite la formule au cas de $R = 887,38$. S'il y a une racine à extraire, on fera l'opération par logarithmes. Pour le rapport π, on prendra 3,1416.

Le cylindre qui est circonscrit à la sphère a évidemment pour base un grand cercle et pour hauteur le diamètre de la sphère, son volume sera donc : $2\pi R^3$; en retranchant $\frac{4}{3}\pi R^3$ qui est, comme on le sait, l'expression du volume de la sphère, on aura pour la différence des deux volumes :

$$2\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{2}{3}\pi R^3$$

Donc pour avoir le côté du cube équivalent, il suffit d'extraire la racine cubique suivante :

$$x = \sqrt[3]{2\pi R^3}$$

Appliquons cette formule à l'exemple proposé, on sera conduit au calcul suivant :

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log 3,1416 = 0,4971509$$
$$3 \log 887,38 = 8,8443288$$
$$\text{C}^{\text{t}}\text{ A de } 3 = 9,5228787$$

$$\log x = \tfrac{1}{3}\ 9,1653384 = 3,0551294$$

D'où enfin :

$$x = 1135,35$$

Problème 281.

Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle sachant que la somme de ses côtés est 132 et que la somme de leurs carrés est 6050 ?

Soient x, y, z les côtés inconnus. Pour

résoudre ce problème, nous avons à traduire ainsi qu'il suit l'énoncé ci-dessus.

$$[1] \quad x + y + z = 132$$
$$[2] \quad x^2 + y^2 + z^2 = 6050$$
$$[3] \quad x^2 + y^2 = z^2$$

La troisième équation résultant d'une propriété bien connue du triangle rectangle.

Remplaçant x^2+y^2 par sa valeur z^2 dans [2] on aura :

$$2z^2 = 6050 \quad z^2 = 3025 \quad z = \sqrt{3025} = 35$$

Substituant maintenant cette valeur de z dans les équations [1] et [2] nous aurons :

$$x + y = 77; \quad x^2 + y^2 = 3025$$

par l'élimination d'y, nous parviendrons à l'équation finale :

$$x^2 - 77x + 1452 = 0$$

d'où :

$$x = 38,5 \pm \sqrt{(38,5)^2 - 1452};$$
$$x = 38,5 \pm \sqrt{30,25} = 38,5 \pm 5,5$$

Les trois côtés inconnus sont donc :

$$x = 44; \quad y = 33; \quad z = 55.$$

Problème 282.

On demande de calculer à $0^m,001$ près les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est de 12^m sachant que ces côtés sont dans le rapport de 2 à 3.

Soient x et y les côtés de l'angle droit, nous aurons les équations :

$$[1] \quad x^2 + y^2 = 12;$$
$$[2] \quad \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$$

Digitized by Google

D'où :

$$x = \frac{3y}{2}$$

Substituant cette valeur dans l'Équation [1] elle devient :

$$\frac{9y^2}{4} + y^2 = 12,\ 9y^2 + 4y^2 = 48,\ 13y^2 = 48$$

$$y = \sqrt{\frac{48}{13}} = 1,921,\quad x = \sqrt{\frac{108}{13}} = 2,282$$

Problème 283.

Construire un carré dans lequel la différence entre la diagonale et le côté soit égale à 6m ; quel sera le rayon du cercle circonscrit à ce carré ?

Soit x le côté du carré, la diagonale égale $x\sqrt{2}$; le problème sera donc résolu par l'Équation :

$$x\sqrt{2} - x = 6$$

D'où

$$x = \frac{6}{\sqrt{2}-1} = \frac{6(\sqrt{2}+1)}{1} = 14,485$$

La diagonale sera alors égale à :

$$14,485 . \sqrt{2} = 20^{m},485.$$

Le rayon du cercle circonscrit égalant la moitié de la diagonale vaudra :

$$10^{m},242.$$

Problème 284.

L'hypoténuse d'un triangle rectangle est de $32^{m},526$; le rapport des côtés de l'angle est de $2^{m},317$; on demande de calculer les côtés à moins de 0,001 près ?

Digitized by Google

Désignons par x et par y les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle, on aura les deux équations :

$$[1] \quad \frac{x}{y} = 2,317 .$$

$$[2] \quad x^2 + y^2 = \overline{32,526}^2$$

De l'équation [1] on tire :

$$x = 2,317\, y ;$$

Portant cette valeur de x dans l'équation [2] il viendra :

$$\overline{2,317}^2 y^2 + y^2 = \overline{32,526}^2$$

Ou bien :

$$(\overline{2,317}^2 + 1)\, y^2 = \overline{32,526}^2$$

On en tire :

$$1^{\circ}\ y = \sqrt{\frac{\overline{32,526}^2}{2,317}} = \frac{32,526}{\sqrt{6,363489}} = 12,888$$

$$2^{\circ}\ x = 29,863$$

Problème 285.

On donne les deux équations :

$$x^2 - y^2 = 2,297 ;$$

$$xy = 3,247$$

On demande de calculer à 0,001 près les valeurs des inconnues x et y ?

De la seconde équation on tire :

$$y = \frac{3,247}{x}$$

Substituant cette valeur dans la première il viendra :

$$x^4 - 2,297\, x^2 - \overline{3,247}^2 = 0$$

$$x^2 = 1,1485 \pm \sqrt{\overline{1,1485}^2 + \overline{3,247}^2} ; \quad x = \sqrt{1,1485 + \sqrt{\overline{1,1485}^2 + \overline{3,247}^2}} = 2,143$$

Digitized by Google

y sera donc :

$$y = \frac{3247}{2143} = 1,515$$

Problème 286.

La surface d'un rectangle est de 216 m q. et son périmètre est de 60 m; quels sont les côtés du rectangle ?

Si nous désignons par x et par y les côtés inconnus du rectangle, la solution du problème nous sera donnée en traduisant l'énoncé de la manière suivante :

$$[1] \quad x + y = 30$$
$$[2] \quad xy = 216$$

De la seconde équation tirons la valeur de y :

$$y = \frac{216}{x}$$

En substituant cette valeur dans la première des deux équations écrites ci-dessus, il viendra :

$$x^2 - 30x + 216 = 0$$

Équation du 2e degré facile à résoudre et qui donne pour la valeur de l'inconnue x :

$$x = 15 \pm \sqrt{255 - 216} = 15 \pm 3 = 18$$

donc :

$$y = \frac{216}{18} = 12$$

Les côtés cherchés sont donc : 18 et 12.

Il est facile de vérifier l'exactitude de ces valeurs.

Digitized by Google

Problème 287.

La hauteur d'un cylindre est égale à $2^m,35$. On propose de calculer le rayon à un centimètre près, sachant que la somme de la surface latérale et des deux bases est égale à la surface d'un cercle de $3^m,24$ de rayon?

Désignons par x le rayon inconnu que nous cherchons.

On sait que la surface latérale est donnée par l'expression : $S_l = 2\pi x \times 2,35$ et la surface des deux bases par $S_{2b} = 2\pi x^2$, nous aurons donc l'équation :

$$\pi \times \overline{3.24}^2 = 2\pi x \times 2,35 + 2\pi x^2$$

Ou bien :

$$\pi \times \overline{3.24}^2 = \pi(2x \times 2,35 + 2x^2)$$

Ou bien encore :

$$\overline{3.24}^2 = 2x \times 2,35 + 2x^2 = 2(x \times 2.35 + x^2)$$

D'où enfin :

$$x^2 + 2.35x - \frac{1}{2}\overline{3,24}^2 = 0$$

On tire de cette équation :

$$x = -1,175 \pm \sqrt{\overline{1,175}^2 + \frac{1}{2}\overline{3,24}^2} = 1^m,40$$

Problème 288.

On fait tourner un rectangle autour de ses deux côtés, les deux volumes sont 40.000 m.c. et 50.000 m.c.

Trouver la diagonale du rectangle?

Désignons par x et par y les deux côtés du rectangle les conditions du problème nous donneront.

Digitized by Google

$$[1]\ \pi x^2 y = 40.000$$
$$[2]\ \pi y^2 x = 50.000\ ;$$

D'où :

$$y = \frac{40000}{\pi x^2}$$

Et en substituant dans la seconde :

$$x^3 = \frac{\overline{40.000}^2}{50,000\pi}$$

Et enfin :

$$x = \sqrt[3]{\frac{40.000}{50,000\pi}}\ ;\ y = \sqrt[3]{\frac{\overline{50,000}^2}{40.000\pi}}$$

Il en résulte que la diagonale du rectangle égale :

$$\sqrt[3]{\frac{\overline{40\,000}^4}{\overline{50,000}^2\pi^2}} + \sqrt[3]{\frac{\overline{50,000}^4}{\overline{40.000}^2\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{256\,00000000}{25\pi^2}} + \sqrt[3]{\frac{625\,00000000}{16\pi^2}} =$$
$$= 469,894 + 734,210 = 1204^m,104$$

Problème 289.

Calculer le côté du carré équivalent à un polygone irrégulier qui a 432 m. de périmètre et tous ses côtés tangents à un cercle dont le rayon est de 54 m ?

(On fera le calcul par logarithmes.)

La surface du polygone est égale à son périmètre multiplié par la moitié de l'apothème ou bien par la moitié du rayon du cercle inscrit au polygone. Nous aurons donc en désignant par x le côté du carré équivalent au polygone irrégulier donné :

$$x^2 = 432 \times \frac{54}{2} = 432 \times 27$$

D'où :

$$x = \sqrt{432 \times 27}$$

En effectuant par les logarithmes, on aura :

Digitized by Google

$$\log. 432 = 2,6354837$$
$$\log. 27 = 1,4313638$$
$$2 \log. x = 4,0668475$$
$$\log. x = 2,0334237 \qquad x = 108^{m}$$

Problème 290.

La différence entre les surfaces du carré et de l'hexagone régulier inscrit dans un même cercle est de 4^{mq}; trouver la surface du cercle à 1^{m} près?

Désignons par x le rayon du cercle dont on demande la surface de l'hexagone sera en la désignant par S':

$$S' = 6\, x \times \frac{x}{4} \sqrt{3} = \frac{3}{2} x^2 \sqrt{3}$$

le carré a pour surface $2\, x^2$ on aura alors.

$$\frac{3}{2} x^2 \sqrt{3} - 2\, x^2 = 4 \,; \quad x^2 = \frac{4}{\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2} =$$

$$= \frac{8}{3\sqrt{3} - 4} = \frac{8(3\sqrt{3} + 2)}{11}$$

La surface du cercle égale:

$$\frac{\pi\, x^2 = (3\sqrt{3} + 2)}{11} = 21^{mq},01$$

Problème 291

Une chaudière cylindrique est terminée latéralement par deux hémisphères. La surface totale est de 5^{m} car. On la coupe suivant l'axe par un plan qui détermine une section dont le périmètre est de 3^{m} Trouver la hauteur et le rayon?

Digitized by Google

Désignons par x et y la hauteur et le rayon du cylindre ; la surface totale aura pour expression : $4\pi y^2 + 2\pi y x$; car elle se compose d'une sphère qui a y pour rayon, et d'un cylindre dont la base a également y pour rayon et x pour hauteur. On aura donc en premier lieu : [1] $4\pi y^2 + 2\pi x y = 5$ ou $2y^2 + xy = \frac{5}{2\pi} = a$. La section obtenue par le plan mené par l'axe se compose de la circonférence d'un cercle qui a y pour rayon et de deux fois la hauteur x du cylindre, d'où une seconde Equation :

$$[2] \quad 2\pi y + 2x = 3 \quad \text{ou} \quad \pi y + x = \frac{3}{2} = b$$

On tire de cette dernière Equation :

$$x = b - \pi y$$

Si maintenant nous substituons cette valeur dans l'Equation [1] on obtient : $2y^2 + by - \pi y^2 = a$;

d'où :

$$y = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4a(\pi - 2)}}{2(\pi - 2)} = \frac{1,5 \pm \sqrt{2,25 - 3,6327}}{2 \times 1,1416}$$

Valeur qui, comme on le voit, est imaginaire.

Problème 292.

On demande de trouver deux nombres dont le produit soit égal à 17 et la somme égale à 18.?

En appelant x et y les deux nombres cherchés, l'énoncé du problème nous fournit immédiatement les deux Equations suivantes :

$$xy = 17 \quad x + y = 18$$

Or, on démontre en algèbre élémentaire, que quand on connaît la somme de deux quantités et leur produit ces deux quantités sont les racines d'une Equation du second degré, ayant pour coefficient

Digitized by Google

de la première puissance de l'inconnue la somme prise avec un signe contraire, en pour terme connu le produit. Dans la question énoncée plus haut, les valeurs de x et de y seront les racines de l'Equation :

$$u^2 - 18u + 17 = 0$$

D'où :

$$y = 9 \pm 8 \quad y' = 17 \quad y'' = 1$$

Nous aurons donc enfin :

$$x = 18 - y' = 18 - 17 = 1$$

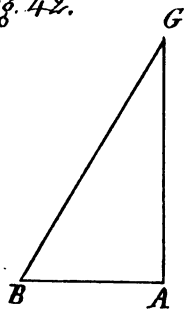
Et par suite :

$$y = 17.$$

Problème 293.

Les deux côtés AB, AC et l'hypoténuse BC d'un triangle rectangle ABC forment une progression arithmétique dont la raison est 25m. Trouver les trois côtés AB, AC, BC du triangle rectangle.

fig. 42.



Désignons par x le côté AB (voy. fig. 42). $AC = x + r$; $BC = x + 2r$; r représentera la raison de la progression. D'après une propriété connue du triangle rectangle on a :

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

ce qui donne l'Equation :

$$(x+2r)^2 = x^2 + (x+r)^2$$

D'où :

$$x^2 + 4rx + 4r^2 = x^2 + x^2 + 2rx + r^2$$

En réduisant il vient :

$$x^2 - 2rx - 3r^2 = 0 \; ; \; x = r \pm \sqrt{r^2 + 3r^2}$$

D'où enfin :

$$AB = x = 3r = 75^m \; ; \; AC = 100^m \; ; \; BC = 125^m.$$

Digitized by Google

Problème 294.

On demande de calculer à $\frac{1}{100}$ près deux nombres dont le produit est 2759 et dont les carrés ont pour différence 1297 ?

Nommons x et y les deux nombres cherchés, l'énoncé du problème nous fournit les deux équations suivantes :

$$[1] \quad xy = 2759$$

$$[2] \quad x^2 - y^2 = 1297$$

De la première équation on tire :

$$y = \frac{2759}{x}$$

En substituant cette valeur dans la seconde équation on obtiendra :

$$x^2 - \left(\frac{2759}{x}\right)^2 = 1297$$

Ce qui donne :

$$x^4 - 1297\,x^2 - (2759)^2 = 0$$

d'où :

$$x^2 = 648{,}5 \pm \sqrt{(648{,}5)^2 + (2759)^2}\,; \quad x = \sqrt{648{,}5 + \sqrt{(648{,}5)^2 + (2759)^2}}$$

D'où encore :

$$x = \sqrt{648{,}5 + \sqrt{8032633{,}25}}\,; \quad x = \sqrt{3482{,}6905} = 59{,}01\,; \quad y = 49{,}75$$

Problème 295.

Quels sont les deux nombres, tel qu'en cherchant leur plus grand commun diviseur, la première division partielle donne 3 pour quotient et pour reste 6 ; et que le plus grand commun diviseur trouvé par la deuxième division soit précisément égal à la 20e partie du plus grand nombre ?

Nommons x et y les deux nombres inconnus,

Digitized by Google

x désignant le plus grand des deux. La première condition nous donne la relation :

$$x = 3y + 6 ;$$

La deuxième :

$$\frac{y}{6} = \frac{x}{20} ;$$

Substituant dans la première équation la valeur de y tirée de la seconde, il vient :

$$x = \frac{9}{10} x + 6$$

d'où on tire :

$$x = 60 \text{ et } y = 18.$$

Problème 296.

Évaluer la surface d'un triangle, sachant que le périmètre est égal à 18 m, qu'un côté a est égal à la demi-somme des deux autres b, c et que le produit de ces deux derniers côtés est égal à 32 ?

On sait que la surface d'un triangle est donnée par la formule :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

D'après l'énoncé du problème $p = 9$.

Par suite :

$$[1] \quad a + b + c = 18$$
$$[2] \quad 2a = b + c$$
$$[3] \quad bc = 32$$

En ajoutant les équations [1] et [2] on obtient : $3a = 18$ donc $a = \frac{18}{3} = 6$; on voit alors que $b + c = 12$. Connaissant la somme et le produit des quantités b, c il est facile de trouver chacune d'elles. b et c sont en effet les racines de

Digitized by Google

l'équation :

$$x^2 - 12x + 32 = 0$$

d'où

$$x = 6 \pm \sqrt{36 - 32} = 6 \pm 2$$

Ce qui donne

$$b = 8 \; ; \; c = 4$$

Par suite, si nous remplaçons dans l'expression de S les lettres p, a, b, c par les valeurs trouvées ci-dessus, il viendra enfin :

$$S = \sqrt{3 \times 9 \times 1 \times 5} = \sqrt{135} = 11^{m.q.}\,6189$$

Problème 297.

Connaissant les trois côtés d'un triangle, déterminer par la trigonométrie les angles et la surface de ce triangle. Si l'on connaissait un côté, le périmètre et la surface, comment trouverait-on les deux autres côtés ?

Dans la trigonométrie, on démontre que les angles du triangle sont donnés par les formules :

$$\tang.\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \; ; \; \tang.\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \; ;$$

$$\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

La surface en fonction des trois côtés est donnée par l'expression :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

La première partie de la question est donc résolue.

Digitized by Google

Pour résoudre la seconde, nous écrirons les deux relations comme :

$$[1] \quad S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$[2] \quad a+b+c = 2p$$

Dans lesquelles les inconnues sont b et c ; de l'équation [2] on tire :

$$b+c = 2p-a$$

La première Equation peut s'écrire :

$$\frac{S^2}{p(p-a)} = p^2 - p(b+c) + bc = p^2 - p(2p-a) + bc = pa - p^2 + bc$$

d'où on tire :

$$bc = \frac{S^2}{p(p-a)} + p(p-a) = \frac{S^2 + p^2(p-a)^2}{p(p-a)};$$

Ce qui conduit à l'équation du second degré :

$$x^2 - (2p-a)x + \frac{S^2 + p^2(p-a)^2}{p(p-a)} = 0$$

d'où :

$$x = \frac{2p-a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2p-a}{2}\right)^2 - \frac{S^2 + p^2(p-a)^2}{p(p-a)}};$$

ce qui donnera :

$$b = \frac{2p-a}{2} + \sqrt{\frac{(p-a)a^2p - 4S^2}{4(p-a)p}}; \quad c = \frac{2p-a}{2} - \sqrt{\frac{(p-a)a^2p - 4S^2}{4(p-a)p}}$$

Telles sont les formules qui donnent les deux côtés b et c en fonction du troisième côté a du périmètre et de la surface S.

Problème 298

Trouver les valeurs de x et de y qui satisfont aux Equations :

$$[1] \quad \log. x^3 + \log. y^2 = \bar{1},4570815$$

$$[2] \quad \log. x - \log. y = 0,230023$$

Digitized by Google

lorsque l'un deux est moyen proportionnel entre les deux autres. Soient donc : x, y, z les trois nombres, nous aurons :

$$[1] \quad y^2 = xz$$
$$[2] \quad x+y+z=7$$
$$[3] \quad x^2+y^2+z^2=21$$

Si l'on connaissait y, la première Equation donnerait le produit des deux nombres et le problème serait résolu. Déterminons donc y. Pour cela, ajoutons les Equations [1] et [3], nous obtenons :

$$(x+z)^2 = 21+y^2$$

L'Equation [2] mise sous la formule :

$$x+z = 7-y \text{ et élevée au carré, donne}$$
$$(x+z)^2 = (7-y)^2;$$

On a donc :

$$(7-y)^2 = 21+y^2$$

d'où :

$$-y = 2$$

On a donc :

$$x+z=5; \quad xz=4$$

Pour connaître la valeur des nombres x et z, il suffira de calculer les racines de l'équation du second degré :

$$X^2 - 5X + 4 = 0$$

d'où :

$$X = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

Par suite :

$$x = 1; \quad z = 4$$

Ainsi les nombres 1, 2, 4 répondent à la question.

Problème 302

Partager le nombre 195 en trois parts

Digitized by Google

qui forment une progression géométrique, et dont la troisième surpasse la première de 120.

Désignons par x, y, z les trois parties inconnues, on aura pour la solution de la question le système des trois équations suivantes :

$$[1] \quad x + y + z = 195$$

$$[2] \quad z - x = 120$$

$$[3] \quad \frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

De l'Équation [2] on tire :

$$z = 120 + x$$

Substituant cette valeur de z dans l'Équation [1], il vient :

$$x + y + 120 + x = 195$$

Ou bien :

$$2x + y + 120 = 195.$$

d'où :

$$y = 75 - 2x \quad [4];$$

Remplaçant enfin dans l'Équation [3] z et y par leurs valeurs il vient :

$$x(120 + x) = (75 - 2x)^2$$

Ou bien :

$$120x + x^2 = \overline{75}^2 - 75 \times 4 \times x + 4x^2$$

Ou encore :

$$3x^2 - 420x + \overline{75}^2$$

En simplifiant il vient :

$$x^2 - 140x + 25 \times 75 = 0$$

Enfin :

$$x^2 - 140x + 1875 = 0$$

On tire :

$$x = 70 \pm \sqrt{4900 - 1875} = 70 \pm \sqrt{3025} = 70 \pm 55$$

Le signe $(-)$ donne $x = 15$.

En vertu de la relation [4], on a : $y = 45$ et enfin la relation [2] donne : $z = 135$. La somme est bien

Digitized by Google

égale à 195 et d'ailleurs on a : $\overline{45}^2 = 135 \times 15$. Si l'on prenait le signe + on trouverait : $x = 125$; $z = 245$ nombre plus grand que la somme donnée.

Arithmétiquement, le problème n'a qu'une solution ; mais algébriquement il en a deux : car si on fait : $y = 175 = 75 - 125 \times 2$, on a :

$x + y + z = 195$ et y^2 ou $(-175)^2 = 30625 = 245 \times 125$

Problème 303.

On donne les trois côtés d'un triangle a, b, c. Exprimer, au moyen de sa surface, le volume engendré par la rotation de ce triangle autour du côté a?

Désignons par S la surface du triangle par h la hauteur correspondante au côté a, V le volume cherché, on a :

$$V = \frac{\pi h^2 a}{3}$$

mais : $ah = 2S$ par suite $a^2 h^2 = 4S^2$; d'où :

$$h^2 = \frac{4S^2}{a^2}$$

Substituant cette valeur de h^2 dans l'expression de V, on aura :

$$V = \frac{4}{3} \pi \frac{S^2}{a}$$

D'un autre côté, on sait que si l'on pose :

$$2p = a + b + c \quad \text{on aura :}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Donc :

$$V = \frac{4\pi}{3a} p(p-a)(p-b)(p-c)$$

Digitized by Google

Problème 304.

La somme de deux nombres égale a; la différence de leur carré est b; on demande quels sont ces deux nombres ? (1).

Désignons par x le plus petit des deux nombres, l'autre sera évidemment égal à $a-x$; leurs carrés seront égaux à :

$$x^2 \text{ et } a^2 - 2ax + x^2;$$

La différence de ces carrés est :

$$a^2 - 2ax,$$ qu'on suppose dans l'énoncé du problème égale à b. On a, par conséquent, l'équation :

$$a^2 - 2ax = b$$

Ou bien :

$$x = \frac{a^2 - b}{2a} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2a}$$

Supposons, par exemple, que la somme des deux nombres soit égale à 8 et la différence de leurs carrés égale à 16. On aura alors en moyen de la formule ci-dessus :

$$x = \frac{64 - 16}{16} = 3$$

Par suite :

$$a - 3 = 5$$

Les deux nombres cherchés seraient donc :

3 et 5

Problème 305.

On a trois quantités x, y, z. On connaît les

(1) Voir Newton, Arithmetica universalis

Digitized by Google

sommes de ces quantités prises deux à deux. On demande la valeur de chacune en particulier. (1)

Désignons par a la somme des quantités x et y; b celle de x et z; enfin c celle de y et z. Pour déterminer les trois quantités x, y, z on aura le système des trois Équations:

$$[1] \quad x+y=a$$
$$[2] \quad x+z=b$$
$$[3] \quad y+z=c$$

Pour éliminer deux des trois inconnues, y et z par exemple, retranchons dans les Équations [1] et [2] on aura alors:

$$y=a-x; \quad z=b-x$$

Substituons ces valeurs dans l'Équation [3], elle deviendra:

$$a-x+b-x=c$$

Ou bien:

$$2x=a+b-c$$

d'où:

$$x=\frac{a+b-c}{2}$$

par suite:

$$y=a-\frac{a+b-c}{2}=\frac{2a-(a+b-c)}{2}=\frac{a-b+c}{2}$$

$$z=b-\frac{(a+b-c)}{2}=\frac{2b-(a+b-c)}{2}=\frac{b-a+c}{2}$$

Supposons, par exemple, que les sommes a, b et c soient respectivement égales à: 9, 10, 13; on aura alors:

$$[1] \quad y+x=9$$
$$[2] \quad x+z=10$$
$$[3] \quad y+z=13$$

(1) Voy. Newton Arithmetica universalis.

Digitized by Google

D'où on tire :

$$x = \frac{a+b-c}{2} = \frac{9+10-13}{2} = 3$$

$$y = \frac{a-b+c}{2} = \frac{9-10+13}{2} = 6$$

$$z = \frac{b-a+c}{2} = \frac{10-9+13}{2} = 7$$

Problème 306.

Quand ses deux soupapes sont ouvertes, un réservoir est vidé en 15 heures ; la petite seule met à le vider 16 heures de plus que la grande. Combien en met la grande ?

Supposons que la contenance du bassin soit de c litres, et désignons par x le nombre d'heures que la grande soupape seule met à vider le bassin ; la petite met évidemment $x+16$; en une heure les deux soupapes videront, la grande : $\frac{c}{x}$ et la petite : $\frac{c}{x+16}$ du bassin. Par conséquent, en 15 heures, les deux soupapes étant ouvertes, videront :

$$\frac{15c}{x} + \frac{15c}{x+16}$$

On aura donc pour résoudre le problème l'équation suivante :

$$\frac{15}{x}c + \frac{15}{x+16}c = c$$

d'où :

$$x(x+16) = 15(2x+16)$$

Et

$$x = 24$$

Ainsi la plus grande des deux soupapes met 24 heures pour vider le bassin.

Digitized by Google

Problème 307.

L'excès d'un nombre sur la racine carrée est 156. Quel est ce nombre ?

Désignons par x le nombre inconnu l'énoncé du problème fournit immédiatement l'équation suivante :

$$x - 156 = \sqrt{x}$$

Multipliant tous les termes des deux membres de cette équation par x il viendra :

$$x^2 - 156\,x = x\sqrt{x}$$

Remplaçant dans tous les termes $\sqrt{x}$ par y, c'est-à-dire prenant $y^2 = x$, on trouve :

$$y^4 - 156\,y^2 = y^3$$

Divisant les deux membres de cette équation par y^2, il vient :

$$y^2 - 156 = y$$

Ou :

$$y^2 - y = 156$$

équation du second degré qui, résolue donne :

$$y = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 156}$$

Effectuant les calculs on trouve :

$$y = 13$$

Mais :

$$y = \sqrt{x}$$

Donc :

$$x = y^2 = 13 = 169.$$

Ce nombre satisfait aux conditions demandées puisqu'il excède de 156 sa racine qui est : 13

Problème.

Digitized by Google

Problème 308.

« Résoudre un triangle rectangle, sachant que le périmètre est 168 et l'un des côtés de l'angle droit 43 ?

Désignons par x l'hypoténuse et par y le côté inconnu de l'angle droit, nous aurons alors :

$$[1] \quad x + y = 168 - 43$$

$$[2] \quad x^2 - y^2 = 43^2$$

L'équation [2] résultant d'une propriété du triangle rectangle.

De l'équation [1] on tire :

$$x = 168 - 43 - y$$

ou :

$$125 - y$$

Remplaçant dans la seconde équation x^2 par sa valeur, il vient :

$$\overline{125}^2 - 2 \times 125 y = \overline{43}^2$$

ou :

$$15625 - 250 y = 1849$$

ou encore :

$$250 y = 15625 - 1849$$

d'où

$$y = \frac{15625 - 1849}{250} = 55,104$$

Par suite :

$$x = 168 - 43 - 55104 = 69,896.$$

Problème 309.

Calculer en degrés, minutes et secondes la valeur de l'arc de cercle dont le rayon est 5 m. sachant que la surface du secteur qui correspond

Digitized by Google

à cet arc est de $7^{m}\frac{1}{2}$?

Désignons par x l'angle cherché, à la longueur de l'arc qui lui correspond dans le cercle de rayon 1, R le rayon du cercle donné et S la surface du secteur.

La surface du secteur a pour expression :

$$S = \frac{Ra}{2}$$

d'où :

$$a = \frac{2S}{R} = \frac{14}{5} = 2,8$$

pour avoir x il suffit de poser la proportion :

$$\frac{x}{180^\circ} = \frac{2,8}{\pi R} \; ; \quad x = 39^\circ 5' 8''$$

Problème 310.

Un physicien a observé que du 8 au 19 Juin d'une certaine année, le thermomètre est monté chaque jour d'un demi-degré ; et que la moyenne arithmétique de toutes les observations donnait $18^\circ + \frac{3}{4}$: quelle température marquait le thermomètre le 8 Juin ?

Désignons par x la température inconnue, c'est-à-dire celle que marquait le Thermomètre le 8 Juin, il est évident que les variations de température du 8 au 19 Juin pourront être représentées par la suite :

$$x,\ x+\frac{1}{2},\ x+\frac{2}{2},\ x+\frac{3}{2},\ x+\frac{4}{2},\ x+\frac{5}{2},\ x+\frac{6}{2},\ x+\frac{7}{2},\ x+\frac{8}{2},\ x+\frac{9}{2},$$
$$x+\frac{10}{2},\ x+\frac{11}{2}.$$

A la seule inspection de cette suite, de terminer on reconnaît une progression par différence dont le

premier terme est : x le dernier terme : $x + \frac{11}{2}$ et le nombre de termes : 12. par suite la somme des termes de cette progression sera donnée par la formule connue :

$$S = \left(\frac{x + x + \frac{11}{2}}{2}\right)12 = \left(x + x + \frac{11}{2}\right)6$$

Ou bien :

$$S = 6x + 6x + 33 = 12x + 33$$

la moyenne arithmétique de cette somme est :

$$\frac{12x + 33}{12}$$

et comme d'après l'énoncé du problème cette moyenne arithmétique est égale à $18° + \frac{3}{4}$ ou $18°75$ on aura l'égalité suivante :

$$\frac{12x + 33°}{12} = 18°75$$

Chassant le dénominateur il vient :

$$12x + 33° = 225°$$

Ou bien :

$$12x = 225° - 33° = 192°$$

d'où enfin :

$$x = \frac{192°}{12} = 16° .$$

Telle est la température que marquait le Thermomètre le 8 Juin.

Problème 311

Un physicien s'est assuré qu'une goutte d'eau de savon formant un cylindre de $0^m,002$ de hauteur et de $0^m,0002$ de rayon peut se développer en une bulle de $0^m,054$ de rayon. On demande quelle est l'épaisseur de l'enveloppe aqueuse de cette bulle ?

Désignons par r le rayon de la goutte, et la

Digitized by Google

sa hauteur ; le volume V du cylindre sera donné par la formule :

$$V = \pi r^2 h$$

Soient ensuite R le rayon de toute la bulle et x l'épaisseur de son enveloppe : le volume de la partie aqueuse sera égal à :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi (R - x)^3$$

On aura donc d'après l'énoncé l'égalité suivante :

$$\pi r^2 h = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi (R - x)^3$$

d'où on tire :

$$x = R - \frac{1}{2}\sqrt[3]{8R^3 - 6r^2 h}$$

et remplaçant pour R, r, h leurs valeurs, on obtient :

$$x = 54 - \frac{1}{2}\sqrt[3]{108^3 - 48} = 0,0007$$

L'épaisseur cherchée est donc :

$$E = \frac{7}{10,000} \text{ de millimètre.}$$

Problème 312

1° Partager le nombre 27 en deux parties telles que la somme de 4 fois le carré de la première et 5 fois le carré de la deuxième soit égale à 1620.

2° Comment faudra-t-il partager le nombre 27 pour que cette somme soit la plus petite possible ?

1° Désignons par x et par y les deux parties cherchées, nous aurons entre x et y les deux équations :

Digitized by Google

$$[1] \quad x + y = 27$$
$$[2] \quad 4x^2 + 5y^2 = 1620$$

qui conduisent à la suivante :

$$[3] \quad 9x^2 - 270x + 3645 - 1620 = 0$$

ou toutes réductions faites :

$$x^3 - 30x + 225 = 0$$

Cette équation donne pour x deux valeurs égales à 15.

On en conclut :

$$x = 15, \; y = 12$$

2° pour résoudre la deuxième partie de la question, remplaçons dans l'Equation [3] le nombre 1620 par m, on obtient :

$$9x^2 - 270x + 3645 - m = 0$$

Pour avoir la condition du minimum de m, il faut écrire que cette équation a des deux racines égales. La valeur correspondante de x sera encore 15 et par suite le minimum de la somme demandée est 1620. Les deux parties de 27 qui répondent à la question sont 15 et 12

Problème 313.

Deux mobiles partent au même instant de deux points A et B et marchent sur la droite AB dans un même sens, A suivant B. Le premier parcourt 1m dans la première minute, 3m dans la seconde, 5m dans la troisième et ainsi de suite de manière que l'espace parcouru dans chaque minute croît en progression arithmétique. Le second parcourt de même 3m dans la première minute, 4m dans la seconde, 5m dans la troisième et ainsi de suite. On demande après

Digitized by Google

combien de minutes le mobile A atteindra le mobile B sachant que la distance AB est de 75^m.

Désignons par x le nombre de minutes écoulées au moment où les deux mobiles se rencontrent. L'espace parcouru par le mobile A est égal à x^2 et la distance au point B se évidemment pour expression.

$$d = x^2 - 75$$

Le point B a parcouru l'espace exprimé par:

$$\frac{x}{2}(5 + x)$$

Il nous suffira maintenant par résoudre le problème d'égaler les deux quantités ci-dessus, ce qui donnera:

$$x^2 - 75 = \frac{x}{2}(5 + x)$$

Ou bien en réduisant et transposant:

$$x^2 - 5x - 150 = 0$$

En résolvant cette équation on obtient les deux racines:

$$x' = 15 \; ; \; x' = 10$$

La valeur 15 satisfait à l'énoncé de la question. Lorsque la rencontre des deux mobiles a eu lieu il s'était donc écoulé 15 minutes.

Problème 314.

Le volume d'un tronc de pyramide est de 25 m.c. 257; la hauteur de ce tronc est de 4^m,235 et la base inférieure de $10^{m.q}$. — On propose de calculer la base supérieure du tronc $\frac{1}{10,000}$ près de sa valeur.

Désignons

Désignons par V^3 le volume du tronc de pyramide
a^2 la base inférieure donnée
b la hauteur donnée
Et enfin x^2 la base supérieure inconnue
Le tronc de pyramyde a pour mesure :

$$\frac{b}{3}\left(a^2+x^2+ax\right)$$

C'est à dire que le volume du tronc est égale au produit du tiers de sa hauteur par la somme de sa base inférieure, sa base supérieure et une moyenne proportionnelle entre ses deux bases. Nous pourrons donc écrire l'egalité suivante :

$$V^3=\frac{b}{3}\left(a^2+x^2+ax\right)$$

Ou bien :

$$x^2+ax+a^2-\frac{3V^3}{b}=0$$

d'où :

$$x=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-a^2+\frac{3V^3}{b}}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{3V^3}{b}-\frac{3a^2}{b}}$$

d'où :

$$x^2=\frac{3V^3}{b}-\frac{a^2}{2}-\sqrt{3a^2\left(\frac{V^3}{b}-\frac{a^2}{4}\right)}$$

Ou bien :

$$x^2=\frac{3V^3}{b}-\frac{a^2}{2}\sqrt{3a^2\left(\frac{V^3}{b}-\frac{a^2}{4}\right)}$$

Ce qui nous donne en remplaçant les lettres par leur valeur :

$$x^2=\frac{3\times 25,237}{4235}-\frac{10,278}{2}-\sqrt{3\times 10278\left(\frac{25,237}{4235}-\frac{10,278}{4}\right)}$$

On tire en effectuant :

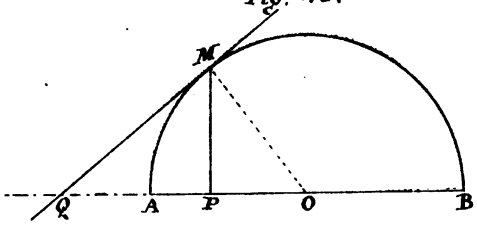
$$x^2=2^{mq},5153$$

Problème 315.

Soit AMB une demi circonférence qui a AB pour diamètre et O pour centre, sur OA prenez OP à volonté et élevez la perpendiculaire PM

Digitized by Google

fig. 43.



qui rencontre la demi circonférence au point M, en ce point mener la tangente MQ qui va couper en Q le prolongement du diamètre. On suppose qu'un cône est décrit par la révolution du triangle PMQ autour de PQ et l'on demande le volume du cône. On représentera le rayon OA par R, OP par a et après avoir trouvé l'expression générale du volume, on y fera :

$R = 88^{m}.30$; $a = 37^{m}.28$. On effectuera les calculs au moyen des logarithmes.

Dans le triangle rectangle MPQ nous avons : (voy fig. 43)

$$\overline{MP}^2 = R^2 - a^2$$

Et dans le triangle rectangle QMO on aura :

$$\overline{MP}^2 = a \times PQ = r^2 - a^2$$

d'où :

$$PQ = \frac{R^2 - a^2}{a}$$

D'autre part, le cône engendré par le triangle PMQ a pour mesure :

$V = \frac{1}{3}\pi \overline{MP}^2 \times QP$ ou en remplaçant $\overline{MP}^2$ et PQ par leurs valeurs trouvées ci-dessus :

$$V = \frac{1}{3}\pi (R^2 - a^2)\left(\frac{R^2 - a^2}{a}\right) = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{R^2 - a^2}{a}\right)^2$$

ou bien :

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{(R+a)^2 (R-a)^2}{a}$$

Telle est l'expression du volume engendré. Pour en trouver la valeur numérique nous remplacerons les lettres par les valeurs données, ce qui donnera :

Digitized by Google

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{\overline{125,58}^2 \times \overline{51,02}^2}{37,28}$$

On aura alors pour trouver V:

Calcul de V.

$$\begin{aligned}
\log.\pi &= 0,4971609 \\
2\log.125,58 &= 4,1978410 \\
2\log.51,02 &= 5,4154810 \\
C^{te}(-\log.3) &= \bar{1},5228787 \\
C^{te}(-\log.37,28) &= \bar{2}\ 4285241 \\
\hline
\log.V &= 6,0618757
\end{aligned}$$

d'où :

$$V = 1153123^{m\,cub},138$$

Problème 316.

Calculer les trois cotés d'un triangle rectangle connaissant la somme p de ses trois côtés et la surface S du triangle. Indiquer la condition à laquelle les données doivent satisfaire pour que le problème soit possible.

Désignons par x, y, z les côtés du triangle, S^2 la surface, p le périmètre, on aura les trois équations suivantes:

$$\begin{aligned}
&[1] \quad x + y + z = p \\
&[2] \quad xy = 2S^2 \\
&[3] \quad x^2 + y^2 = z^2
\end{aligned}$$

La première équation donne:

$$x + y = p - z$$

Elevant les deux membres de cette équation au carré on obtient :

Digitized by Google

$$x^2+y^2+2xy = p^2+z^2-2pz$$

Remplaçant dans cette Equation: x^2+y^2 par z^2 et $2xy$ par $4S^2$ on obtient:

$$z^2+4S^2 = p^2+z^2-2pz$$

d'où:

$$2pz = p^2-4S^2$$

On tire de cette dernière Equation:

$$z = \frac{p^2-4S^2}{2p}$$

Substituant cette valeur de z dans l'Equation [1] on aura:

$$x+y = p-\frac{p^2-4S^2}{2p} = \frac{p^2+4S^2}{2p}$$

Mais, d'après l'Equation [2]

$$xy = 2S^2$$

x et y seront alors les racines de l'Equation:

$$X^2-\frac{p^2+4S^2}{2p}X+2S^2=0$$

d'où:

$$X = \frac{p^2+4S^2 \pm \sqrt{(p^2+4S^2)^2-2\times 16p^2S^2}}{4p}$$

On a donc:

$$x = \frac{p^2+4S^2+\sqrt{(p^2+4S^2)^2-2\times 16p^2S^2}}{4p}$$

$$y = \frac{p^2+4S^2-\sqrt{(p^2+4S^2)^2-2\times 16p^2S^2}}{4p}$$

Pour que les racines soient réelles il faut évidemment que p et S satisfassent à l'inégalité:

$$p^2+4S^2 > 4pS\sqrt{2}$$

Ou bien:

$$p^2+4S^2-4pS\sqrt{2} > 0$$

Egalant à 0 le premier membre de cette inégalité, on obtient pour p:

$$p = 2S\sqrt{2} \pm \sqrt{8S^2-4S^2} = 2S\sqrt{2} \pm 2S$$

Le troisième: $p^2+4S^2-4pS\sqrt{2}$ est égal à:

$$(p-2S\sqrt{2}-2S)(p-2S\sqrt{2}+2S)$$

Pour que le trinome: $p^2+4S^2-4pS\sqrt{2}$ reste

Digitized by Google

constamment positif, il suffira donc qu'on ait :

$$p > 2S(1+\sqrt{2})$$

Si cette condition est remplie les valeurs de x et de y seront toujours réelles.

Problème 317.

Un cône dont la base a son rayon égal à 2m et dont la hauteur est de 15m est coupé par un plan parallèle à la base et distant du sommet de 12m. On demande la surface latérale du tronc du cône ?

Le rayon de la base supérieure du tronc du cône, est donné par la proportion :

$$\frac{x}{2} = \frac{12}{15}$$

D'où :

$$x = 1,6$$

L'apothème du cône égalera :

$$\sqrt{(2-1,6)^2 + 3^2} = \sqrt{9,16}$$

Si donc nous désignons par S la surface cherchée on aura :

$$S = \pi(2+1,6)\sqrt{9,16} = \pi . 3,6 . \sqrt{9,16}$$

d'où :

Calcul de S.

$$\log. \pi = 0,4971509$$
$$\log. 3,6 = 0,5563025$$
$$\frac{1}{2} \log. 9,16 = 0,4809477$$

$$\log S = 1,5344011$$

Par suite :

$$S = 34^{m.q.}, 2295$$

Problème 318.

Un cylindre inscrit dans une sphère de 1m de rayon, est tel que sa surface latérale est la moitié de la surface d'un grand cercle de cette sphère. On demande la valeur du volume du même cylindre?

En désignant par x le rayon de la base du cylindre par y sa hauteur, nous aurons, nommant S la surface latérale du cylindre:

$$S = 2\pi xy$$

On aura donc, d'après l'énoncé du problème, l'égalité suivante:

$$2\pi xy = \frac{1}{2}\pi r^2$$

mais $r = 1^m$ donc:

$$[1] \quad xy = \frac{1}{4}$$

Mais $\frac{1}{2}y$ est moyenne proportionnelle entre les segments du diamètre: $1+x$ et $1-x$; donc on aura:

$$[2] \quad \frac{y^2}{4} = (1+x)(1-x) = 1 - x^2$$

Éliminant y entre les équations [1] et [2] on arrive à l'Équation:

$$1 - x^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{16x^2}\right) = \frac{1}{64x^2}$$

Ou bien:

$$x^4 - x^2 + \frac{1}{64} = 0$$

d'où:

$$x^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{64}} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{15}}{8}$$

$$x = \sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{15}}{8}}$$

Nous aurons pour le volume, le volume cherché:

$$\pi x^2 y = \frac{1}{4}\pi\sqrt{\frac{4 \pm \sqrt{15}}{8}}$$

ce qui conduit

Digitized by Google

aux deux valeurs :

$$\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{4+3,8730}{8}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{7,8730}{8}} = 0^{mc},779141$$

$$\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{4-3,8730}{8}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{0,1270}{8}} = 0^{mc}\ 098957$$

Problème 319.

Calculer l'expression du côté du décagone régulier inscrit dans le cercle du rayon R, en fonction de ce rayon et l'appliquer au cas où $R = 0^m,358972$

On sait que le côté du décagone s'obtient en divisant le rayon en moyenne et extrême raison ; si donc nous nommons x le côté du décagone régulier, nous aurons l'Equation :

$$\frac{R}{x} = \frac{x}{R-x}$$

ou bien :

$$x^2 + Rx - R^2 = 0$$

D'où :

$$x = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

Faisant dans cette formule, d'après l'énoncé : $R = 0^m.358972$ on obtient pour le côté cherché la valeur :

$$x = 0^m.221857.$$

Problème 320

Si l'on multiplie le tiers d'un certain nombre par son quart et qu'on ajoute au produit le quintuple du nombre lui-même, le résultat surpasse d'autant

Digitized by Google

le nombre 200 que le nombre lui-même est au-dessous de 280. On demande quel est ce nombre ?

Désignons par x, le nombre cherché, la traduction de l'énoncé du problème sera évidemment :

$$\frac{x^2}{12} + 5x - 200 = 280 - x$$

Ou bien :

$$x^2 + 60x - 2400 = 3360 - 12x$$

Ou encore :

$$x^2 + 72x = 5760$$

d'où :

$$x = -36 \pm \sqrt{36^2 + 5760}$$

Par conséquent :

$$x = 48$$

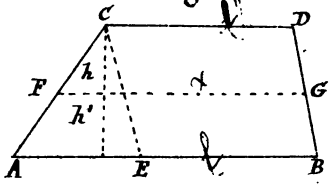
Problème 321

Les deux bases d'un trapèze sont

$$AB = 18^m$$
$$CD = 12^m$$
$$H = 7^m$$

On propose de calculer à $0^m.01$ près à quelle distance de la base du trapèze AB il faut mener une parallèle FG pour qu'elle partage la surface du trapèze en deux parties équivalentes ?

fig. 44



Nommons l et l' les longueurs des bases AB et CD du trapèze (Voy. fig. 44) x la longueur de la ligne parallèle aux bases qui diviseraient le trapèze en parties équivalentes, h et h' les deux portions dans lesquelles se trouve

Digitized by Google

$$(x+l')h = \frac{l+l'}{2}H \quad \text{et} \quad \frac{h}{H} = \frac{x-l'}{l-l'}, \text{ ou } h = \frac{(x-l')H}{l-l'}$$

$$\frac{x^2-l^2}{l-l'} = \frac{l+l'}{2} \quad \therefore \quad 2x^2 - 2l^2 = l^2 - l'^2$$

235 $$x = \sqrt{\frac{l^2+l'^2}{2}}$$

divisée la hauteur H; nous aurons :

$$h.\frac{l+x}{2} = h'.\frac{l'+x}{2}$$

Menons la droite CE parallèle à BD; nous aurons :

$$\frac{h}{x-l} = \frac{H}{l'-l}$$

d'où :

$$h = \frac{H(x-l)}{l'-l}$$

On trouvera de même : $h' = \frac{H(l'-x)}{l'-l}$

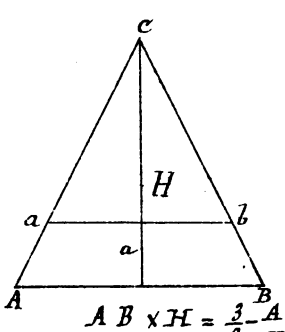
Substituant aux lettres leurs valeurs, on a :

$$x = 15^m,30 \quad h' = 3^m,15.$$

Problème 392.

Étant donné un triangle ABC; on demande à quelle distance de la base AB, il faut mener une parallèle ab, pour que la surface du trapèze ABab soit le tiers de celle du triangle?

fig. 45.



Appelons H la hauteur du triangle ABC (voy. fig. 45) et x la distance à laquelle il faut mener la droite parallèle à la base, on aura :

$$AB \times H = \frac{3}{2}\, ab\,(H-x)$$

Mais

$$\frac{ab}{AB} = \frac{H-x}{H}; \quad ab = \frac{AB}{H}(H-x)$$

donc :

$$AB \times H = \frac{3}{2}\frac{AB}{H}(H-x)^2$$

Ou :

$$\frac{2}{3}H^3 = (H-x)^2, \; H-x = \frac{\sqrt{6}}{3}H$$

d'où :

Digitized by Google

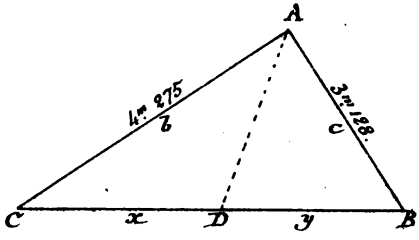
D'où :

$$x = \frac{3-\sqrt{6}}{3} H.$$

Problème 323

Les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle ABC ont pour longueur 3^m128 et 4^m275, Calculer à 0,001 près les segments que la bissectrice de l'angle droit de ce triangle détermine sur l'hypoténuse ?

fig. 46.



Désignons par b et c les côtés de l'angle droit, par x et y les projections de ces côtés sur l'hypoténuse que nous désignerons par a. D'après une propriété connue du triangle rectangle, on aura : (Voy. fig. 46)

$$x + y = a = \sqrt{b^2 + c^2}$$

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{x}{y}$$

D'où on tire les valeurs de x et y d'après les formules :

$$\frac{b^2 + c^2}{c^2} = \frac{x+y}{y} = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{y}$$

d'où :

$$y = \frac{c^2 \times \sqrt{b^2+c^2}}{b^2+c^2} = \frac{c^2}{\sqrt{b^2+c^2}}$$

Ainsi donc :

$$x = 3^m,059 \; ; \; y = 2^m,238.$$

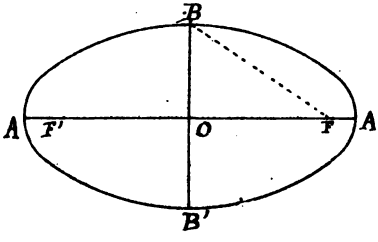
Problème

Digitized by Google

Problème 324.

Le méridien terrestre étant regardé comme une ellipse dont le demi-grand axe est égal à 6377 kil et le demi-petit axe égal à 6356 kil, on propose de calculer à 1 kil près la distance des deux foyers de cette ellipse ?

fig. 47.



Soit c la distance du centre O de l'ellipse au foyer F (voy. fig. 47) et le demi-grand axe, b le demi-petit axe, on a entre ces trois quantités la relation :

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Remplaçons les lettres a et b par leurs valeurs, nous aurons :

$$c^2 = (6377 + 6356)(6377 - 6356)$$

d'où :

$$c = \sqrt{(6377 + 6356)(6377 - 6356)}$$

En effectuant, on trouve :

$$c = 517 \text{ kil.}$$

Et par conséquent, la distance des foyers FF' égale 2c on aura facilement :

$$FF' = 1034 \text{ kil à un kilomètre près.}$$

Digitized by Google

Digitized by Google

Trigonométrie.

Transformations qui sont d'un usage fréquent.

Problème 325.

Vérifier l'égalité suivante :

$$\text{tang.}\ \frac{a}{2} = \text{cosec.}\ a - \text{cot.}\ a$$

Remplaçons dans le second membre cosec. a et cot. a par leurs respectives il viendra :

$$\text{tang.}\ \frac{a}{2} = \frac{1}{\sin.a} - \frac{\cos.a}{\sin.a} = \frac{1-\cos.a}{\sin.a}\ ;$$

mais

$$1-\cos.a = 2\sin.^2\frac{a}{2}\ ;\ \sin.a = 2\sin.\frac{a}{2}\cos.\frac{a}{2}$$

donc :

$$\text{tang.}\ \frac{a}{2} = \frac{2\sin.^2\frac{a}{2}}{2\sin.\frac{a}{2}\cos.\frac{a}{2}}$$

En simplifiant le second membre de cette égalité on a pour sa valeur :

$$\frac{\sin.\frac{a}{2}}{\cos.\frac{a}{2}} = \text{tang.}\ \frac{a}{2}$$

L'égalité est donc vérifiée.

Problème 326.

Vérifier l'égalité suivante :

$$\text{cot.}\ a = \text{cosec.}\ 2a + \text{cot.}\ 2a.$$

Remplaçons dans le second membres Cosec. 2a et Cot. 2a ;

Digitized by Google

par les valeurs $\frac{1}{\sin.2a}$ et $\frac{\cos.2a}{\sin.2a}$ qui leur sont égales on aura :

$$\cot.a = \frac{1}{\sin.2a} + \frac{\cos.2a}{\sin.2a} = \frac{1+\cos.2a}{\sin.2a} ;$$

mais :

$$1+\cos.2a = 2\cos^2 a ; \sin.2a = 2\sin.a \cos.a ,$$

donc :

$$\cot.a = \frac{2\cos.^2 a}{2\sin.a \cos.a}$$

En simplifiant le second membre de cette égalité on

$$\frac{\cos.a}{\sin.a} = \cot.a$$

L'égalité est donc vérifiée.

Problème 327.

Vérifier l'égalité suivante :

$$\cot\frac{b}{2} - tg.\frac{b}{2} = 2\cot.b$$

Remplaçons $\cot.\frac{b}{2}$ et $tg.\frac{b}{2}$ par les valeurs :

$$\frac{\cos.\frac{b}{2}}{\sin.\frac{b}{2}} \text{ et } \frac{\sin.\frac{b}{2}}{\cos.\frac{b}{2}}$$ il viendra :

$$2\cot.b = \frac{\cos.\frac{b}{2}}{\sin.\frac{b}{2}} - \frac{\sin.\frac{b}{2}}{\cos.\frac{b}{2}} = \frac{\cos.^2\frac{b}{2} - \sin.^2\frac{b}{2}}{\sin.\frac{b}{2}\ \cos.\frac{b}{2}} ;$$

Mais

$$\cos.^2\frac{b}{2} - \sin.^2\frac{b}{2} = \cos.b ; \sin.\frac{b}{2}\cos.\frac{b}{2} = \frac{\sin.b}{2}$$

Ce qui rend :

$$2\cot.b = \frac{\cos.b}{\frac{\sin.b}{2}} = \frac{2\cos.b}{\sin.b} = 2\cot.b$$

L'égalité est donc vérifiée.

Digitized by Google

Problème 328.

Vérifier l'égalité suivante :

$$\sin. 3a \sin. a = \sin.^2 2a - \sin.^2 a.$$

Le premier membre :

$$\sin. 3a \sin. a = \sin.(2a + a) \sin.(2a - a)$$

On sait d'ailleurs que, $\sin.(a+b) \sin.(a-b) = \sin.^2 a - \sin.^2 b$, si donc nous mettons à la place de a, $2a$; et à la place de b, a; il viendra :

$$\sin.(2a + a) \sin.(2a - a)$$

Ou bien encore :

$$\sin. 3a \sin. a = \sin.^2 2a - \sin.^2 a$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Problème 329

Vérifier l'égalité suivante :

$$tg. 3a\, tg. a = \frac{tg.^2 2a - tg.^2 a}{1 - tg.^2 a\, tg.^2 2a}$$

Le premier membre :

$tg. 3\, tg. a = tg.(2a + a)\, tg.(2a - a)$ mais remarquons que le premier facteur : $tg.(2a + a)$ est égal à :

$$\frac{tg. 2a + tg. a}{1 + tg. a\, tg. 2a}$$

et que le second est égal à :

$$\frac{tg. 2a - tg. a}{1 + tg. a\, tg. 2a}$$

Si donc nous effectuons le produit de ces facteurs nous aurons :

$$tg. 3a\, tg. a = \frac{tg. 2a + tg. a}{1 - tg. a\, tg. 2a} \times \frac{tg. 2a - tg. a}{1 + tg. a\, tg. 2a} = \frac{tg.^2 2a - tg.^2 a}{1 - tg.^2 a\, tg.^2 2a}$$

Problème

Digitized by Google

Problème 330.

Exprimer $tg.\ \frac{a}{2}$ au moyen de $1-\cos a$ et $1+\cos a$?

On sait que : $tg\ \frac{a}{2} = \frac{\sin.\ \frac{a}{2}}{\cos\ \frac{a}{2}}$

Mais remarquons que :

$$\sin\ \frac{a}{2} = \sqrt{2\sin^2\frac{a}{2}}\ ;\quad \cos\frac{a}{2} = \sqrt{2\cos^2\frac{a}{2}}$$

Donc :

$$tg.\ \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{2\sin^2\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}}}$$

Nous voyons encore que les quantités placées sous le radical sont égales respectivement à $1-\cos a$ et à $1+\cos a$; donc enfin :

$$tg.\ \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Problème 331.

Démontrer que : $tg.(45^\circ - \frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}}$

On sait que :

$$1-\sin a = 1-\cos(90^\circ - a) = 2\sin^2(45^\circ - \tfrac{a}{2})$$

De même :

$$1+\sin a = 1+\cos(90^\circ - a) = 2\cos(45^\circ - \tfrac{a}{2})$$

En divisant ces égalités membre à membre, il vient :

$$\frac{1-\sin a}{1+\sin a} = \frac{2\sin^2(45^\circ - \frac{a}{2})}{2\cos^2(45^\circ - \frac{a}{2})} = tg^2(45^\circ - \tfrac{a}{2})$$

Ou bien en extrayant la racine carrée du 1er membre :

$$tg.(45 - \tfrac{a}{2}) = \sqrt{\frac{1-\sin a}{1+\sin a}} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Digitized by Google

Problème 332.

Démontrer que :

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos.a \cos.b \cos.c = 1$$

$$a+b+c = 180^\circ \text{ donc } \cos c = \cos 180^\circ - (a+b)$$

Ou bien :

$$\cos.c = -\cos(a+b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b$$

D'où l'on déduit :

$$\cos.c + \cos.a \cos b = \sin a \sin b$$

En élevant les deux membres de cette égalité au carré, il vient :

$$\cos^2 c + \cos^2 a \cos.^2 b + 2\cos.a \cos b \cos.c = \sin^2 a \sin^2 b$$

Mais remarquons que :

$$\sin.^2 a \sin^2 b = (1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b =$$

$$= 1 - \cos^2 a - \cos^2 b + \cos^2 a \cos.^2 b.$$

En substituant cette valeur dans l'égalité précédente, puis supprimant de part et d'autre $\cos^2 a$ $\cos^2 b$, on aura enfin :

$$\cos.^2 c + 2\cos.a \cos b \cos.c = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b, \text{ d'où :}$$

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos.^2 c + 2\cos.a \cos b. \cos.c = 1$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Problème 333.

Démontrer que :

$$\sin^2 \frac{a}{2} + \sin^2 \frac{b}{2} + \sin^2 \frac{c}{2} + 2\sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} = 1$$

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 90^\circ ; \cos\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2}\right) = \sin \frac{c}{2}$$

développant le premier membre de cette dernière égalité, il vient :

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} - \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} = \sin \frac{c}{2}$$

d'où :

$$\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} = \sin \frac{c}{2} + \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2}$$

Digitized by Google

En élevant les deux membres de cette égalité au carré, nous aurons :

$$\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2} = \sin^2\frac{c}{2} + \sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2} + 2\sin\frac{c}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{a}{2}$$

mais :

$$\cos^2\frac{a}{2} = \left(1-\sin^2\frac{a}{2}\right);\quad \cos^2\frac{b}{2} = \left(1-\frac{\sin^2 b}{2}\right)$$ donc l'égalité ci-dessus deviendra :

$$\left(1-\sin^2\frac{a}{2}\right)\left(1-\sin^2\frac{b}{2}\right) = \sin^2\frac{c}{2} + \sin^2\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2} + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

Ou bien en effectuant le produit indiqué dans le premier membre :

$$1-\sin^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{b}{2} + \sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2} = \sin^2\frac{c}{2} + \sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

En effaçant de part et d'autre le terme commun : $\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}$, on a :

$$1\sin^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{b}{2} = \sin^2\frac{c}{2} + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

d'où :

$$1 = \sin^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{b}{2} + \sin^2\frac{c}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Problème 334.

Démontrer que :

$$\cos. a + \cos. b + \cos. c = 1 + 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}$$

$$\cos. a = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2};\quad \cos b = 1 - 2\sin^2\frac{b}{2};\quad \cos c = 1\ 2\sin^2\frac{c}{2}$$

dans le problème nous avons démontré que :

$$\sin^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{b}{2} + \sin^2\frac{c}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} = 1$$

doublons les deux membres de cette égalité, nous aurons alors :

$$2\sin^2\frac{a}{2}\ 2\sin^2\frac{b}{2} + 2\sin^2\frac{c}{2} + 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} = 2$$

Retranchons maintenant les deux membres de cette égalité de $+3$ ou ce qui revient au même de : $+1+1+1$; il viendra :

$$\left(1-2\sin^2\frac{a}{2}\right) + \left(1-\sin^2\frac{b}{2}\right) + \left(1-2\sin^2\frac{c}{2}\right) - 4\sin\frac{a}{2}\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} =$$
$$= 3-2 = 1$$

Digitized by Google

Ou bien :

$$\cos a + \cos b + \cos c = 1 + 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$$

C. Q. F. D.

Problème 335.

Vérifier l'égalité suivante :

$$\text{tang. } a \text{ tang. } b + \text{tang. } a \text{ tang } c + \text{tang. } b \text{ tang } c = 1$$

Quand $a + b + c = 90°$

$$\text{Cot. } c = \frac{1}{\text{tg } c} = \text{tang. } (a+b) = \frac{\text{tang } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \text{ tang. } b}$$

On a donc :

$$\frac{1}{\text{tang. } c} = \frac{\text{tang } a + \text{tang. } b}{1 \text{ tang } a \text{ tang } b}$$

D'où on tire :

$$1 - \text{tang. } a \text{ tang } b = \text{tang } c \,(\text{tang } a + \text{tang. } b)$$

$$1 - \text{tang } a \text{ tang } b = \text{tang } a \text{ tang } c + \text{tang } b \text{ tang } c.$$

En faisant : tang a tang b dans le second membre avec le signe +, il viendra enfin :

$$1 \text{ tang. } a \text{ tang. } c + \text{tang } b \text{ tang } c + \text{tang } a \text{ tang } b.$$

C. Q. F. D.

Problème 336.

Démontrer l'égalité suivante :

$$\text{cot } a + \text{cot. } b + \text{cot. } c = \text{cot. } a \text{ cot. } b \text{ cot. } c$$

$$a + b + c = 90$$

$$\frac{1}{\text{cot } c} = \text{Cot. } (a+b) = \frac{\text{cot. } a \text{ cot. } b - 1}{\text{cot. } a + \text{cot. } b}$$

d'où facilement :

$$\text{Cot. } a + \text{cot. } b = \text{cot. } c \,(\text{cot. } a \text{ cot. } b - 1)$$

Digitized by Google

Ou bien encore :

$$\cot a + \cot b = \cot c \cot a \cot b - \cot c$$

En faisant passer cot. c dans le premier membre nous aurons :

$$\cot a + \cot b + \cot c = \cot a \cot b \cot c$$

Ce qu'il fallait démontrer?

Problème 337.

Démontrer l'égalité suivante :

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + \sin^2 a \sin b \sin c = 1$$

$a + b + c = 90°$

On sait que $\sin c = \cos(a+b) = \cos a \cos b \sin a \sin b$;

En faisant passer sin. a sin. b dans le premier membre de cette dernière égalité, il viendra :

$$\sin c + \sin a \sin b = \cos a \cos b;$$

Élevons maintenant les deux membres de cette équation au carré, nous aurons :

$$\sin^2 c + \sin^2 a \sin^2 b + 2 \sin c \sin a \sin b = \cos^2 a \cos^2 b$$

Remplaçons dans le second membre :

$\cos^2 a \cos^2 b$ par $(1 - \sin^2 a)(1 - \sin^2 b)$

On enfin en effectuant ce dernier produit on aura :

$$1 - \sin^2 a - \sin^2 b + \sin^2 a \sin^2 b.$$

Donc :

$$\sin^2 c + \sin^2 a \sin^2 b + 2 \sin c \sin a \sin b = 1 - \sin^2 a - \sin^2 b + \sin^2 a \sin^2 b$$

En réduisant et transposant, on obtient :

$$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + 2 \sin a \sin b \sin c = 1$$

Ce qu'il fallait démontrer?

Problème 338.

Démontrer l'égalité suivante :

Digitized by Google

$$\text{tang } a + \text{tang } b = \frac{2 \sin (a+b)}{\cos(a-b) + \cos (a+b}$$

On sait que.

$$\text{tang } a + \text{tang } b = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} =$$

$$= \frac{\sin a \cos b + \sin . b \cos a}{\cos . a \cos . b} = \frac{\sin (a+b}{\cos . a \cos b}$$

multipliant les deux termes de cette dernière fraction par 2 on aura:

$$\text{tang } a + \text{tang } b = \frac{2 \sin (a+b)}{2 \cos . a \cos . b}$$

Au dénominateur $2 \cos a \cos b$ nous pouvons ajouter et retrancher $\sin . a \sin . b$ sans rien changer à l'égalité ci-dessus ;

Donc:

$$\text{tang } a + \text{tang } b = \frac{2 \sin (a+b}{2 \cos . a \cos . b + \sin a \sin b - \sin a \sin b}$$

Mais il est facile de voir que le dénominateur équivaut à:

$$\cos (a+b) + \cos (a-b)$$

Donc enfin:

$$\text{tang } a + \text{tang } b = \frac{2 \sin (a+b)}{\cos (a-b + \cos . (a+b)}$$

Ce qu'il fallait démontrer:

Problème 339.

Démontrer l'inégalité suivante:

$$x - \sin . x < \frac{x^3}{4}$$

Pour démontrer cette inégalité nous partirons de la suivante qui est évidente:

$$\text{tg} . \frac{x}{2} > \frac{x}{2}$$

Or bien

Digitized by Google

Ou bien :

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} > \frac{x}{2}$$

En chassant le dénominateur :

$$\sin\frac{x}{2} > \frac{x}{2}\cos\frac{2}{x}$$

Multiplions les deux membres de cette dernière inégalité par $2\cos\frac{x}{2}$, nous aurons :

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} > \frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\,2\cos\frac{x}{2}$$

Ou ce qui revient au même :

$$\sin x > x\cos^2\frac{x}{2}$$

Ou :

$$\sin x > x\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)$$

On a plus forte raison en $\sin\frac{x}{2}$ par $\frac{x}{2}$:

$$\sin x > x\left(1-\frac{x^2}{4}\right)$$

En effectuant :

$$\sin x > x - \frac{x^3}{4}$$

Ou enfin :

$$x - \sin x < \frac{x^3}{4}$$

Ce qu'il fallait démontrer :

Problème 340.

Démontrer l'égalité suivante :

$$\cot a + \operatorname{cosec} a = \cot\frac{a}{2}$$

Remplaçons dans le premier membre $\cot a$ par $\frac{\cos a}{\sin a}$ et $\operatorname{cosec} a$ par $\frac{1}{\sin a}$, on a :

$$\frac{\cos a}{\sin a} + \frac{1}{\sin a} = \cot\frac{a}{2}$$

Mais le premier de cette dernière égalité peut s'écrire ainsi :

$$\frac{1+\cos a}{\sin a} = \frac{2\cos^2\frac{a}{2}}{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}$$

Digitized by Google

Ou bien en simplifiant :

$$\frac{1+\cos. a}{\sin. a} = \frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = \cot. \frac{a}{2}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Problème 341.

Démontrer l'égalité suivante :

$$\operatorname{cosec} a - \cot. a = \operatorname{tang}. \frac{a}{2}$$

Remplaçons dans le premier membre cosec a par $\frac{1}{\sin a}$ et cot. a par $\frac{\cos. a}{\sin a}$, l'égalité ci-dessus deviendra :

$$\frac{1}{\sin. a} - \frac{\cos a}{\sin a} = \frac{1-\cos a}{\sin a} = \operatorname{tg} \frac{a}{2}$$

Il ne nous reste qu'à vérifier que la fraction : $\frac{1-\cos a}{\sin a} = \operatorname{tg}. \frac{a}{2}$

$$1 \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2} ; \quad \sin. a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$$

En divisant ces égalités membre à membre, nous avons enfin :

$$\frac{1-\cos a}{\sin a} = \frac{2 \sin^2 \frac{a}{2}}{2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = \operatorname{tang}. \frac{a}{2}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Problème 342.

Démontrer l'égalité suivante :

$$\sec a + \operatorname{cosec} a = \frac{4 \sin 45^\circ \cos (45^\circ - a}{\sin. 2a}$$

En remplaçant dans le premier membre

Digitized by Google

Sec a par $\frac{1}{\cos a}$ et par cosec a par $\frac{1}{\sin a}$ nous aurons:

$$\frac{1}{\cos a} + \frac{1}{\sin a} = \frac{\sin a + \cos a}{\sin a \cos a} = \frac{\sin a + \sin(90^\circ - a}{\sin a \cos a}$$

Au numérateur de cette dernière fraction nous avons une somme de sinus qu'il faut transformer en produit au moyen de la relation connue:

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

Il vient donc:

$$\frac{\sin a + \sin(90^\circ - a}{\sin. a \cos. a} = \frac{2 \sin 45^\circ \cos(45^\circ - a}{\sin. a \cos. a}$$

Multipliant enfin les deux termes de cette dernière fraction par 2 en remplaçant: 2 sin a cos. a par sin 2 a en nous aurons alors:

$$\text{Sec } a + \text{cosec. } a = \frac{4 \sin 45^\circ \cos.(45 - a}{\sin. 2 a}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Problème 343

Démontrer l'égalité suivante:

$$\text{Cosec. } a - \text{Sec. } a = \frac{4 \cos 45^\circ \sin 45^\circ - a}{\sin 2 a}$$

$$\text{cosec. } a - \text{sec. } a = \frac{1}{\sin a} - \frac{1}{\cos a} = \frac{\cos a - \sin a}{\cos a \sin a} = \frac{\sin(90^\circ - a \sin a}{\cos. a \sin. a}$$

Nous transformerons, comme dans le problème précédent, la différence des sinus: $\sin(90^\circ - a) - \sin a$ en un produit qui sera égal a: $2 \cos 45^\circ \sin(45 - a)$, et l'égalité ci-dessus deviendra:

$$\text{cosec. } a - \text{sec. } a = \frac{2 \cos 45 \sin(45 - a)}{\cos. a \sin. a}$$

Digitized by Google

Multiplions les deux termes du second membre par 2 et remplaçons 2 sin a cos a par : sin 2a, nous aurons enfin :

$$\text{Cosec } a - \text{Sec } a = \frac{4 \cos 45^\circ \sin (45^\circ - a}{\sin 2a}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Problème 344.

Démontrer l'égalité suivante :

$$\text{Cot. } a + \text{tang } a = \frac{2}{\sin 2a}$$

Remplaçons : cot. a par $\frac{\cos a}{\sin a}$ et tang a par : $\frac{\sin a}{\cos a}$, il viendra :

$$\frac{\cos a}{\sin a} + \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\sin a \cos a}$$

Or, on sait que :

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

Donc :

$$\text{Ct. } a + \text{tang. } a = \frac{1}{\sin a \cos a}$$

Multiplions les deux termes du second membre par 2 et remplaçons le dénominateur i. sin. a cos. a par sa valeur sin 2a, l'égalité ci-dessus deviendra :

$$\text{Cot. } a + \text{tang } a = \frac{2}{\sin 2a}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Problème 345.

Démontrer l'égalité suivante :

Digitized by Google

$$\text{tang } a + \sin a = 2 \text{ tang } a \cos^2 \frac{a}{2}$$

Dans le premier membre de cette égalité, remplaçons tang a par $\frac{\sin a}{\cos a}$ et nous aurons :

$$\frac{\sin a}{\cos a} + \sin a = \frac{\sin a + \sin a \cos a}{\cos a}$$

mettant au numérateur de cette dernière fraction sin a en facteur commun nous aurons :

$$\frac{\sin a}{\cos a} + \sin a = \frac{\sin a\,(1 + \cos a)}{\cos a}$$

mettant à la place de $1 + \cos a$, sa valeur $2 \cos^2 \frac{a}{2}$, l'égalité ci-dessus devient :

$$\frac{\sin a}{\cos a} + \sin a = \frac{\sin a \times 2 \cos^2 \frac{a}{2}}{\cos a} = \frac{\sin a}{\cos a} \times 2 \times \cos^2 \frac{a}{2}$$

Ce dernier membre équivaut à :

$$2 \text{ tang. } a \cos^2 \frac{a}{2}$$

Ce qu'il fallait démontrer

Problème 347.

Démontrer l'Egalité suivante :

$$\text{tang. } a - \sin a = 2 \text{ tang } a \sin^2 \frac{a}{2}$$

Dans le premier membre il suffira de remplacer comme dans le problème précédent tang a par $\frac{\sin a}{\cos a}$ et on aura :

$$\frac{\sin a}{\cos a} - \sin a = \frac{\sin a - \sin a \cos a}{\cos a}$$

Mettant sin a en facteur commun dans le numérateur de cette dernière fraction, il viendra :

$$\frac{\sin a}{\cos a} - \sin a = \frac{\sin a\,(1 - \cos a)}{\cos a}$$

Mais

$$1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2},$$

Donc :

Digitized by Google

Donc :

$$\frac{\sin a}{} - \sin a = \frac{\sin a \times 2\sin^2 \frac{a}{2}}{} = \sin a \times 2 \times \sin^2 \frac{a}{2}$$

Enfin :

$$\frac{\sin a}{\cos a} - \sin a = 2 \operatorname{tang} a \sin^2 \frac{a}{2}$$

Ce qu'il fallait démontrer

Problème 348.

Démontrer l'Egalité suivante :

$$1 + \operatorname{tang} a = \frac{\sin(45° + a)}{\cos 45° \cos a}$$

Remplaçant 1 par sa valeur tang 45° ; il viendra :

$$\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} a = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} + \frac{\sin a}{\cos a}$$

Réduisant au même dénominateur, nous aurons.

$$\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} a = \frac{\cos a \sin 45° + \cos 45° \sin a}{\cos 45° \cos a} = \frac{\sin(45° + a)}{\cos 45 \cos a}$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Problème 349.

Démontrer l'égalité suivante :

$$1 \operatorname{tang} a = \frac{\sin(45° - a)}{\cos 45° \cos a}$$

Remplaçons comme dans la question précédente 1 par sa valeur tang. 45° nous aurons :

$$\operatorname{tang} 45° - \operatorname{tang} a = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} - \frac{\sin a}{\cos a}$$

Réduisant au même dénominateur on trouve :

$$\operatorname{tang} 45° - \operatorname{tang} a = \frac{\sin 45° \cos a - \cos 45° \sin a}{\cos 45 \cos a} = \frac{\sin(45° - a)}{\cos 45° \cos a}$$

Digitized by Google

Ce qu'il fallait démontrer.

Problème 350.

Vérifier l'Egalité suivante :

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b.$$

En développant $\sin(a+b)$ et $\sin(a-b)$ en effectuant leur produit, on a :

$$\sin(a+b)\sin(a-b) = (\sin a\cos b + \cos a\sin b)(\sin a\cos b - \cos a\sin b)$$
$$= \sin^2 a\cos^2 b - \cos^2 a\sin^2 b = \sin^2 a(1-\sin^2 b) - (1-\sin^2 a)\sin^2 b =$$
$$= \sin^2 a - \sin^2 a\sin^2 b - \sin^2 b + \sin^2 a\sin^2 b = \sin^2 a - \sin^2 b,$$

les termes $(-\sin^2 a\sin^2 b)$ et $(+\sin^2 a\sin^2 b)$ se détruisant évidemment.

Ce qu'il fallait démontrer.

Problème 351

Vérifier l'Egalité suivante :

$$\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b$$

Développant, comme dans la question précédente $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ et effectuant leur produit on aura :

$$\cos(a+b)\cos(a-b) = (\cos a\cos b - \sin a\sin b)(\cos a\cos b + \sin a\sin b) =$$
$$= \sin^2 a\cos^2 b - \cos^2 a\cos^2 b = \sin^2 a(1-\sin^2 b) - (1-\cos^2 a)\sin^2 b =$$
$$= \cos^2 a - \cos^2 a\sin^2 b - \sin^2 b + \cos^2 a\sin^2 b = \cos^2 a - \sin^2 b$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Problème 352

Démontrer l'Egalité suivante :

Digitized by Google

$$\frac{\text{tang. } a - \sin a}{\text{tang. } a} = 1 \cos. a$$

Le second membre peut s'écrire ainsi qu'il suit :

$$1 \cos a = \frac{\sin a (1 - \cos. a}{\sin a} = \frac{\sin. a - \sin a \cos a}{\sin a} =$$

$$\frac{\frac{\sin a}{\cos a} - \sin a}{\frac{\sin a}{\cos a}} = \frac{\text{tang. } a - \sin. a}{\text{tang. } a}$$

Ce qu'il fallait démontrer

Résolution des Equations Trigonométriques.

Problème 353.

Etant donnés les deux angles :

$$A = 25° 57' 19''; \; B = 21° 16' 16''$$

Calculer à une seconde près, un troisième angle x tel que l'on ait :

$$\sin x = \sin A + \sin B.$$

En transformant la somme des sinus dans le second membre en produit, il vient :

$$\sin. x = 2 \sin. \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

Mais :

$$\frac{A+B}{2} = 22° 37' 2'' 5; \; \frac{A-B}{2} = 1° 20' 16'' 5$$

D'où :

$$\sin x = 2 \sin. 22° 37' 2'', 5 \cos 1° 20' 16'' 5$$

Calcul de x :

Digitized by Google

Calcul de x :

$$\log 2 = 0,3010300$$
$$\log \sin 22^\circ 37' 3'',5 = \bar{1}\ 5349811$$
$$\log \cos 1^\circ 20' 16'',5 = \bar{1}\ 9992851$$

$$\log x = \bar{1}\ 8853962$$

D'où : $x = 50^\circ\ 15'\ 33''\ 8$

Problème 354.

Trouver les angles x qui satisfont à l'équation :

$$357915 \cos. x + 193878 \sin. x = 222336.$$

Désignons par a le coefficient de $\cos. x$, par b celui de $\sin. x$ et enfin par c la quantité qui se trouve dans le second membre, l'Equation proposée pourra s'écrire :

$$a \cos x + b \sin x = c$$

On :

$$a \cos x = c - b \sin x$$

En élevant les deux membres de cette équation au carré, il vient :

$$a^2 \cos^2 x = c^2 - 2bc \sin x + b^2 \sin^2 x$$

Mais :

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Donc

$$a^2 (1 - \sin^2 x) = c^2 - 2bc \sin x + b^2 \sin^2 x$$

Ou bien :

$$a^2 - a^2 \sin^2 x = c^2 - 2bc \sin x + b^2 \sin^2 x$$

En transposant :

$$a^2 \sin^2 x + b^2 \sin^2 x - 2bc \sin x = a^2 - c^2$$

On :

Digitized by Google

$$(a^2+b^2)\sin^2 x - 2bc\sin x = a^2-c^2$$

Divisant tous les termes par (a^2+b^2) il vient :

$$\sin^2 x - \frac{2bc}{a^2+b^2}\sin x = \frac{a^2-c^2}{a^2+b^2}$$

Equation du second degré qui, résolue, donne :

$$\sin x = \frac{bc+\sqrt{b^2c^2+(a^2-c^2)(c^2+b^2)}}{a^2+b^2}$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs, et effectuant, on trouve :

$$+\sin x = 0.996688 ; -\sin x\ 0.476373$$

$+\sin x$ donne : $x = 85°\ 20'\ 8''$ et $-\sin x$ donne : $x = 28°27$

Problème 355.

Calculer à un dixième de seconde près tous les arcs positifs et moindres que la circonférence, qui satisfont à l'équation :

$$\cos 2x = \cos x + 1$$

Dans l'équation proposée $\cos 2x = \cos x + 1$ je substitue à $\cos. 2x$ sa valeur $2\cos^2 x - 1$ et alors l'équation donnée s'écrira :

$$\cos^2 x - \frac{1}{2}\cos x - 1 = 0$$

Equation du second degré, qui, résolue, donne :

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

Ou bien :

$$\cos x = \frac{1 \pm 4,12314}{4}$$

Le cosinus d'un arc étant toujours moindre que l'unité, il est évident que la première des deux valeurs indiquées ne convient pas. Prenant la seconde

Digitized by Google

seconde, on a :

$$\cos x = 0.78078$$

Ou bien :

$$-\cos x = 0,78078.$$

Mais on démontre dans les traités de Trigonométrie que :

$$-\cos x = \cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$$

D'où on conclut :

$$\cos(\pi - x) = 0.78078 ; \quad \cos(\pi + x) = 0,78078$$

En prenant les logarithmes on trouve :

$$\log. \cos(\pi - x) = \log. 0,78078 = \bar{1},8925287 ;$$

d'où :

$$\pi - x = 38° 40' 4'', 6$$

De même pour :

$$\pi + x = 38° 40' 4'', 6$$

De la première égalité on tire :

$$x = \pi - 38° 40' 4'', 6 = 141° 19' 55'' 4$$

La seconde égalité donne pour x une valeur qui ne convient pas puisque d'après l'énoncé de la question les arcs demandés doivent être positifs.

Problème 356.

On donne deux arcs A et B

$A = 38° 24' 36''$; $B = 49° 19' 43''$ On propose de calculer un troisième arc tel que :

$$\tang x = \tang A + \tang B$$

Remplaçons dans cette formule $\tang A$ par sa valeur : $\frac{\sin A}{\cos A}$ de même : $\tang B$ par $\frac{\sin B}{\cos B}$ l'équation proposée deviendra alors :

$$\tang. x = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \cos B + \sin B \cos A}{\cos A \cos B} ;$$

Digitized by Google

$$= \frac{\sin(A+B}{\cos A \cos B} = \frac{\sin 87° 44' 19''}{\cos 38° 24' 36'' \cos 49° 19' 43''}$$

Ce qui conduit au calcul suivant :

Calcul de x.

$$\log \sin 87° 44' 19'' = \bar{1},999\,6616$$
$$C^{te}(-\log \cos 38° 24' 36'') = 0,105913\,9$$
$$C^{te}(-\log \cos 49° 19' 43'') = 0,185\,93\,91$$

$$\log \operatorname{tang} x = 0,29\,15\,146$$

D'où :

$$x = 62° 55' 46'' 2$$

Problème 357

Calculer un angle x tel que l'on ait :

$$2 \sin x = \sin(45° - x)$$

En développant le second membre cette égalité, l'équation proposée peut s'écrire :

$$2 \sin x = \sin(45° - x) = \sin 45° . \cos x - \sin x \cos 45°$$

Ou :

$$2 \sin x = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos x - \sin x)$$

Donc :

$$\sin x\left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\right. = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cos x = \frac{1}{2}(4+\sqrt{2}) \sin x$$

Par suite :

$$\sqrt{2} \cos x = (4+\sqrt{2}) \sin x$$

D'où on tire :

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}} = \frac{1}{1+2\sqrt{2}}$$

Posons :

$$\operatorname{tang}^2 y = 2\sqrt{2}$$

Il viendra :

$$\operatorname{tang} x = \frac{1}{\sec^2 y} = \cos^2 y$$

Digitized by Google

En prenant les logarithmes, on a :

$$\log. \text{tang}\, x = 2 \log. \cos. y.$$

Or, l'Equation :

$$2\sqrt{2} = \text{tang}^2 y \text{ donne :}$$

$$\log 2 + \frac{1}{2} \log 2 = 2 \log. \text{tang}\, y.$$

d'où :

$$\log 2 = 0.30\,10300$$

$$\frac{1}{2} \log 2 = 0.15\,051\,50$$

$$2 \log \text{tang}\, y = 0.45.15450$$

$$\log \text{tang}\, y = 0.2257725$$

$$y = 59^\circ\, 15'\, 50''8$$

d'où :

Cherchons maintenant le logarithme de cos 59°. 15' 50",8 on trouve :

$$\log \cos 59^\circ 15' 50'',8 = \bar{1},7084901$$

Par suite :

$$\log. \text{tang}\, x = \bar{1},4169802$$

d'où :

$$x = 14^\circ\, 38'\, 19''\, 7$$

Vérification

$$45^\circ - x = 30^\circ\, 21'\, 40''\, 3$$

$$\log \sin 30^\circ 21' 40'',3 = \bar{1}\,7036776; \begin{cases} \log 2 = & 0.3010300 \\ \log \sin 14^\circ 38' 19''7 = & \bar{1}.4026476 \\ \log \sin (45^\circ - x) = & \bar{1}.7036776 \end{cases}$$

La valeur de x ci dessus est exacte.

Problème 358.

Calculer les angles x tel que l'on ait

$$3 \cos x + 2 \text{ tang}\, x = 5.$$

Digitized by Google

Posons : tang. $x = y$; $\cos x = \frac{1}{y}$

L'Equation proposée pourra alors s'écrire :

$$\frac{3}{y} + 2y = 5$$

Où :

$$2y^2 - 5y + 3 = 0$$

D'où :

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

Par suite :

$$y' = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5 ; \quad y'' = 1$$

La seconde racine donne :

$$\text{tang}\, x = 1$$

Par suite :

$$x = 45°$$

La première donne :

$$x = 56° 18' 35'' 6$$

Problème 359

Résoudre l'équation :

$$5 \sin^2 x - 2 \cos^2 x - 3 \sin x \cos x = 0$$

Cette Equation, comme il est facile de le voir, étant homogène par rapport à $\sin x$ et à $\cos x$, on posera : $\frac{\sin x}{\cos x}$ ou tang $x = y$;

Par suite :

$$\sin x = y \cos x$$

En remplaçant dans l'Equation $\sin x$ par : $y \cos x$, il viendra :

$(5y^2 - 2 - 3y) \cos^2 x = 0$ Equation qui se divise en deux, savoir :

$$(5y^2 - 2 - 3y = 0 \quad \cos^2 x = 0$$

La seconde de ces deux équations ne convient

La seconde résolue donne :

$$y = \text{tang}\, x = \frac{3 \pm \sqrt{9+40}}{10} = \frac{3 \pm 7}{10}$$

D'où :

$$y' = 1 \; ; \; y'' = 0,4$$

La première racine y' donne $\text{tang}\, x = 1$

Par suite :

$$x = 45^\circ$$

La seconde donne :

$$x = 104^\circ\, 2'\, 10''$$

Problème 360.

Trouver l'angle x tel que :

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 0.784.$$

Cette équation peut s'écrire :

$$\text{tang}^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2}) = 0.784$$

Puisque :

$$\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = \frac{2 \sin^2 (45^\circ - \frac{1}{2} x)}{2 \cos^2 (45^\circ - \frac{1}{2} x} = \text{tang}^2 (45^\circ - \tfrac{1}{2} x$$

$$\log 0.784 = \bar{1}\, 8943161$$

$$2 \log \text{tang.} (45^\circ - x) = \bar{1}\, 8943160$$

$$\log \text{tang} (45^\circ - x) = \bar{1}\, 9471580$$

d'où :

$$45^\circ - \tfrac{1}{2} x = 44^\circ\, 31'\, 22'',4$$

Par suite :

$$\tfrac{1}{2} x = 7^\circ\, 28'\, 37''\, 6$$

D'où enfin :

$$x = 6^\circ,\, 57'\, 15''\, 2$$

Digitized by Google

Problème 361.

Résoudre :

$$x \cos = -324,6219 \; ; \; x \sin y = 549,5827$$

Divisant la seconde égalité par la première, il vient :

$$\tan g = -\frac{549,5827}{324,6219}$$

Ou bien :

$$\tan g\,(180^\circ - y) = \frac{549,5827}{324,6219}$$

Calcul de y.

$$\begin{aligned} \log 549,5827 &= 2,7400330 \\ \text{Ct}\,(-\log 324,6219) &= \overline{3},4886222 \\ \log \tan g.(180^\circ - y) &= 0,2286552 \\ \text{d'où :} \quad 180^\circ - y &= 59^\circ\,25'\,50''\,7 \\ \text{par suite :} \quad y &= 120^\circ\,34'\,9''3 \end{aligned}$$

Calcul de x

$$\begin{aligned} \log 549,5827 &= 2,7400330 \\ \text{Ct}\,(-\log \sin y &= 0,0649892 \\ \log x &= 2.8050222 \end{aligned}$$

D'où :

$$x = 638,296.$$

Problème 362.

Résoudre l'Equation :

$$\frac{\sin(27^\circ + x)}{\sin x} = 1,2$$

Chassons d'abord le Dénominateur $\sin x$

Digitized by Google

il viendra :

$$\sin(27^\circ + x) = 1{,}2 \sin x$$

développant le premier membre, on aura :

$$\sin 27^\circ \cos x + \cos 27^\circ \sin x = 1{,}2 \sin x$$

Comme on le voit, cette équation est homogène par rapport à $\sin x$ et à $\cos x$

Posons donc

$$\frac{\sin x}{\cos x} \text{ ou } \operatorname{tang} x = y$$

d'où

$$\sin x = y \cos x$$

Remplaçant donc dans l'équation ci-dessus $\sin x$ par $y \cos x$ on aura :

$$[y(1{,}2 - \cos 27^\circ) - \sin 27^\circ] \cos x = 0$$

d'où il résulte :

$$y(1{,}2 - \cos 27^\circ) = \sin 27^\circ ; \cos x = 0$$

$\cos x = 0$ donne : $\sin x = 1$ qui ne vérifie pas l'Equation proposée. Nous allons donc résoudre la première des deux équations écrites ci-dessus, on tire :

$$y = \operatorname{tang} x = \frac{\sin 27^\circ}{1{,}2 - \cos 27^\circ}$$

Il faut rendre cette dernière formule calculable par logarithmes ; à cet effet nous écrirons :

$$1{,}2 - \cos 27^\circ = 1{,}2 \cos^2 \varphi$$

En posant : $\frac{\cos 27^\circ}{1{,}2} = \sin^2 \varphi$

L'expression de $\operatorname{tang} x$ sera égale alors à :

$$\operatorname{tang} x = \frac{\sin 27^\circ}{1{,}2 \cos 2\varphi}$$

Calcul de φ $\cos 27^\circ = \bar{1}{,}9498809$

$$\text{Cte}(-\log 1{,}2) = \bar{1}{,}9208187$$

$$2 \log \sin \varphi = \bar{1}{,}8796996$$

$$\log \sin \varphi = \bar{1}{,}9398498$$

d'où : $\varphi = 75^\circ 12' 5''$

Digitized by Google

Calcul de x

$$\log \sin 27^\circ = \bar{1},6570468$$
$$C^t(-\log 1,2) = \bar{1},9208187$$
$$C^t(-2\log \cos g) =$$
$$\log \operatorname{tang} x =$$

d'où : $x = 80^\circ\, 12'\, 44'',2$

Problème 363

Résoudre l'équation :

$$2 \sin x + 3 \cos x = 3$$

Trouver les deux valeurs de l'angle x plus petites que 90°

De l'équation proposée on tire :

$$\cos x = \frac{3 - 2 \sin x}{3}$$

En substituant cette valeur dans la relation : $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, on obtient :

$$13 \sin^2 x - 12 \sin x = 0$$

Ce qui donne :

$$\sin x = 0$$

Et par suite :

$$x = 0$$

Et $\sin x = \frac{12}{13}$ ou bien : $x = 67^\circ\, 22'\, 48'',5$.

Problème 364.

Calculer l'arc dont le sinus égale la quinzième partie du sinus de 15°.

Si nous appelons x l'arc cherché on aura :

Digitized by Google

évidemment l'Équation suivante :

$$\sin x = \frac{1}{15} \sin 15^\circ$$

Calcul de x :

$$\begin{aligned} \log \sin. 15^\circ &= 1,4129962 \\ \text{Ct}\ (-\log 15) &= \bar{2},3239087 \\ \log \sin x &= \bar{2},2369049 \end{aligned}$$

d'où $x = 8^\circ\ 59'\ 19''1$

Problème 365.

Résoudre :

$$\tang x + \tang y = 1$$
$$x + y = 45$$

On aura les transformations suivantes :

$$\tang x + \tang y = 1$$

Ou :

$$\sin x \cos y + \cos x \sin y = \cos y \cos x$$

Ou bien :

$$\sin(x+y) = \cos y \cos x = \sin 45$$
$$\cos x \cos y = \cos(x+y) + \sin x \sin y$$
$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ + \sin x \sin y$$

Par suite :

$$\sin x \sin y = 0$$

Cette Équation donne : $y = 0$ et par conséquent : $x = 45^\circ$

Ces valeurs satisfont, en effet, à l'Équation proposée. Car on a :

$$x + y = 45^\circ + 0^\circ = 45^\circ$$
$$\tang x + \tang y = \tang 45^\circ + \tang 0^\circ = 1$$

Problème 366.

Résoudre l'Équation :

Digitized by Google

(1) $\sin x + \frac{17}{8} \cos x = -\frac{2}{3}$

Il y a des tangentes de toutes les grandeurs.

Nous pourrons donc poser :

(2) $\tan \varphi = \frac{17}{8}$ (φ étant un angle auxiliaire)

L'équation (1) deviendra alors :

(3) $-\sin(x + \varphi) = \frac{2}{3} \cos \varphi$

Calcul de φ

$$\begin{aligned} \log 17 &= 1.2304489 \\ \log 8 &= \underline{\bar{1},0969100} \\ \log \tan \varphi &= 0,3273389 \end{aligned}$$

Calcul de $x + \varphi$

$$\begin{aligned} \log. \cos \varphi &= \bar{1},6292225 \\ \log. 2 &= 0,3010300 \\ \log. 3 &= \underline{\bar{1},5228788} \\ \log. [(-\sin(x+\varphi)] &= \bar{1},4531313 \end{aligned}$$

L'arc correspondant au logarithme $\bar{1},4531313$ est $16° 29' 30''$ à cause du signe de sinus on peut prendre.

$$x + \varphi = 196° 29' 30''$$

d'où : $x = 131° 41' 34'$

L'équation (3) est encore vérifiée par :

$x = -64° 47' 56' - 16° 29' 30'' = 81° 17' 26''$ et par une infinité d'autres valeurs.

Résolution des Triangles.

Problème 367.

Dans un triangle ABC (Voy. fig 48) rectangle

Digitized by Google

on donne $a = 1785^m,395$; $B = 59°37'42''$; on demande de calculer l'angle C et les cotés b c ?

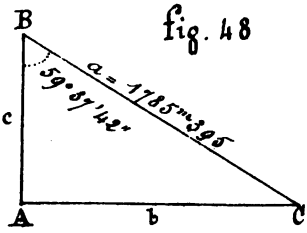


fig. 48

L'angle C s'obtiendra en retranchant la valeur de l'angle B de 90° ce qui donne :

$C = 90° - 59° 37'42'' = 30°22'18''$

Les côtés b et c seront donnés par les relations connues.

$$b = a \sin B \; ; \; c = a \cos B$$

Calcul de b	Calcul de c
$\log \sin 59°37'42'' = \bar{1},9358919$	$\log. \cos 59°37'42'' = \bar{1},7038132$
$\log. 1785,395 = 3,2517343$	$\log. 1785,395 = 3,2517343$
$\log. b = 3,1876262$	$\log c = 2,9555475$
D'où : $b = 1540^m,374$	D'où : $c = 902^m,708$

Donc :

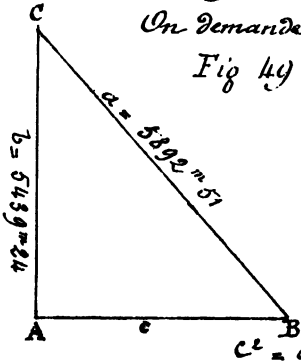
$$C = 30°22'18'' \; , \; b = 1540^m,374 \; ; \; c = 902^m,708$$

Problème 368.

Dans un triangle ABC rectangle en A, on donne : $a = 5892^m51$; $b = 5439^m,24$.

On demande le coté c et les angles B, C

Fig 49



Dans le triangle ABC rectangle en A (Voy. fig 49) on connaît l'hypoténuse a et le côté b de l'angle droit, on aura donc le côté c au moyen de la formule connue :

$$c^2 = a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Digitized by Google

Par suite $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$

Quant à l'angle C il sera donné par la formule

$$\text{tang}\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$$

Et enfin :

$$B = 90° - C$$

Calcul de c		Calcul de C	
$\log(a+b) =$	$= 4.0542970$	$\log(a-b) =$	$= 2,6563570$
$\log(a-b)$	$= 2.6563570$	$C^t \log(a+b)$	$= \bar{5},9457030$
$2\log c$	$= 6.7106540$	$2\log\text{tang}\,\frac{C}{2}$	$= \bar{2},6020600$
$\log c$	$= 3.3553270$	$\log\text{tang}\,\frac{C}{2}$	$= \bar{1},3010300$
d'où :	$= 2266^m35$	d'ou $\frac{C}{2}$	$= 11°\,37'\,11''52$

par suite $C = 22°\,37'\,11''52$

On déduit alors :

$$B = 90° - 22°\,37'\,11'',52 = 67°\,22'\,48'',48$$

Ainsi donc :

$$c = 2266^m35\,;\ B = 67°\,22'\,48'',48\ \ C = 22°\,37'\,11'',52$$

Problème 369

Dans un triangle ABC, rectangle en A on donne :

$$B = 53°\,19'\,27''41\,;\ a = 607^m018$$

On propose de calculer l'angle C et les côtés b et c

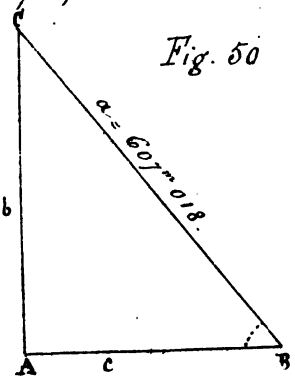


Fig. 50

L'angle C (voy. fig. 50) est donné par la relation $C = 90° - B = 90° - 53°\,19'\,27'',41 = 36°\,40'\,32''59$

Quant aux cotés b et c de l'angle droit, ils seront donnés par les formules connues

$$b = a \sin B\,;\ c = a \cos B$$

On aura donc pour trouver ces deux côtés à effectuer le calcul suivant :

Digitized by Google

Calcul de b.

$\log a \ldots = 2,7832016$
$\log. \sin B \ldots = \bar{1},9041900$
$\log b = 2,6873916$
$b = 486^{m}.846$

Calcul de c.

$\log. a = 2.7832016$
$\log. \cos B = \bar{1}\ 7761818$
$\log c = 2.5593834$
$c = 362^{m}.563$

Ainsi donc :

$C = 36° 40' 32'' 9$; $b = 486^{m}.846$; $c = 362^{m}.563$

Problème 370.

Dans un triangle ABC on a :

$a = 6489^{m}.75$; $B = 47° 11' 53'' 8$; $C = 51° 19' 37'' 2$

On propose de calculer A, b, c.

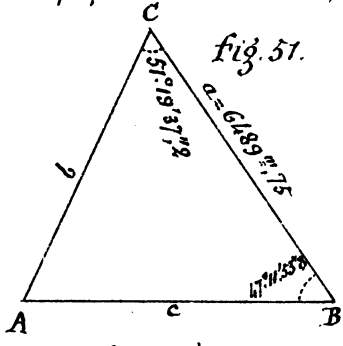


fig. 51.

Dans un triangle quelconque ; la somme des angles, est, comme on le sait, égale à 180°, on aura donc, l'angle A (voy. fig. 51) en retranchant de 180° la somme des deux angles B + C.

Ce qui donne :

$A = 180° - (B + C) = 81° 28' 29''$

Les côtés b et c seront donnés par les relations :

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \; ; \; c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Voici le type des calculs

Calcul de b.

Digitized by Google

Calcul de b		Calcul de c	
log a	= 3.8122280	log a	= 3,8122280
log sin B	= $\bar{1}$,8655241	log sin C	= $\bar{1}$,8924981
Cte(- log. sin A)	= 0,0048254	Cte(- log sin A	= 0,0048254
log B	= 3,6825775	log c	= 3,7095515
d'où : b	= 4814m,91	d'où : c	= 5123m.32

Ainsi donc :

$$A = 81°28'29''; \; b = 4814^m791; \; c = 5.123^m32$$

Problème 371

Dans un triangle ABC on donne :

$$a = 2597^m845; \; b = 3084^m327; \; A = 56°12'47''$$

On propose de calculer B, C et c

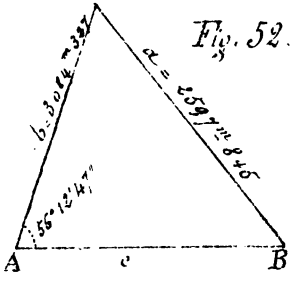


Fig. 52.

Dans le triangle ABC (voy. fig. 52, on a :

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A}$$

C'est à dire que les sinus sont proportionnels aux côtés opposés de cette relation on tire la valeur de sin B

Calcul de Sin B.

log sin A = log sin 56° 12'47''	=	$\bar{1}$,9196592
log b = log 3084m27	=	3,4891604
Cte(- log a) = Cte(- log 2597m845	=	$\bar{4}$,5853868
log sin B	=	$\bar{1}$,9942064

Dans cette question, comme il est facile de le voir, il y a deux solutions :

Dans la première : B = 80° 39' 43''

Digitized by Google

Dans la seconde $B = 99° 20' 17''$

Nous allons donner le type des calculs pour deux cas :

Première solution : $B = 80° 39' 43$

Calcul de C $C = 180° - (A + B)$

$$\begin{array}{rl} & 180° \\ A = & 56° 12' 47'' \\ B = & 80° \ 39' \ 43'' \\ \hline C = & 43° \ \ 7 \ \ 30'' \end{array}$$

Calcul de c par la formule $c = \frac{a \sin c}{\sin A}$

$\log a = \log 2597^m 845 = 3,4146132$

$\log \sin C = \log \sin 43° 7' 30 = \bar{1},8347972$

$C^t(-\log. \sin A) = C^t(-\log \sin 56° 12' 47'') = 0,0803408$

$\log c = 3,3297512$

D'où : $c = 2136^m 737$

Deuxième solution $B = 99° 20' 17''$

Calcul de C : $C = 180° - (A + B)$

$$\begin{array}{rl} & 180° \\ A = & 56° 12' 47'' \\ B = & 99° 20' 17'' \\ \hline C = & 24° 26' 56'' \end{array}$$

Calcul de c par la formule $c = \frac{a \sin c}{\sin A}$

$\log a = \log 2597^m 845 = 3,4146132$

$\log \sin C = \log \sin 24° 26' 56 = \bar{1},6168759$

$\log \sin A = \log \sin 56° 12' 47'' = 0,0803408$

$\log c = 3,1118299$

D'où : $C = 1293^m 689$

Problème 372

Dans un triangle ABC, on donne :

$b = 82153^m 3$; $c = 76182^m 6$; $A = 47° 53' 19'' 5$

Digitized by Google

On propose de calculer B, C et a

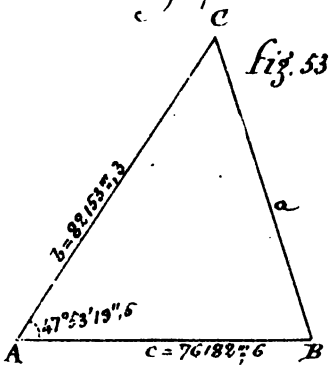


fig. 53.

Cherchons d'abord la demi somme $\frac{B+C}{2}$ des angles B et C (Voy. fig. 53)

$B + C = 180° - 47°53'19''5 =$
$= 132°6'40''50$

D'où : $\frac{B+C}{2} = 66°3'20'',25$

M. Lentenant, calculons $\frac{B-C}{2}$ au moyen de la formule connue :

$$\text{tang.}\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot.\frac{A}{2}$$

$b - c = 5970^m,7$; $b + c = 158335^m,9$; $\frac{A}{2} = 23°56'39'',75$

Calcul de $\frac{B-C}{2}$

$\log(b-c)$	=	3,7760253
$c^t[-\log(b-c)]$	=	6,8004206
$\log.\cot.\frac{A}{2}$	=	0,3526526
$\log\text{tang}\frac{B-C}{2}$	=	$\bar{2}$,9289985

d'où : $\frac{B-C}{2} = 4°51'13''62$

Calcul des angles B et C

$$B = \frac{B+C}{2} + \frac{B-C}{2} = 70°54'33'',87$$

$$C = \frac{B+C}{2} - \frac{B-C}{2} = 61°12'6'',63$$

Enfin on aura le côté a au moyen de la formule :

$$a = (b+c)\frac{\sin A}{\cos\frac{B-C}{2}}$$

Calcul de a

$\log(b+c)$	=	$\log 158335^m,9$	= 5,1995794
$\log\sin\frac{A}{2}$	=	$\log\sin 23°56'39'',75$	= $\bar{1}$,6083350
$c^t(-\log\cos\frac{B-C}{2})$	=	$c^t(-\log 4°51'13,62)$	= 0,0015603
		$\log.a$	= 4,8095847

d'où : $a = 64491^m,835$

Digitized by Google

c'est ainsi donc :

$B = 70°54'33,''87$; $C = 61°12'6'',63$; $a = 6449^{m},835$

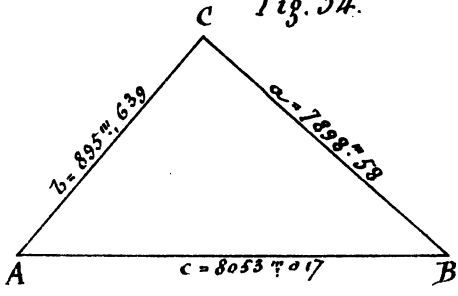
Problème 373.

Dans un triangle ABC, on donne :

$a = 7898^{m},58$; $b = 895^{m},639$; $c = 8053^{m},017$

On demande de calculer les trois angles A, B, C opposés à ces côtés

fig. 54.



Désignons par $2p$ le périmètre $a+b+c$ (Voy. fig. 54) on aura alors :

$$p = \frac{a+b+c}{2} = 8423^{m},618$$

Par suite :

$p - a = 525^{m},038$

$p - b = 7527^{m},979$

$p - c = 370^{m},601$

Prenons maintenant les logarithmes de p, $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$.

$\log. p = 3,9254986$

$\log(p-a) = 2,7201907$

$\log(p-b) = 3,8766787$

$\log(p-c) = 2,5689066$

Les angles A B seront déterminés par les formules :

$$\text{tang.}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \; ; \quad \text{tang.}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}.$$

Calcul de l'angle A

Digitized by Google

Calcul de l'angle A.

$$\log(p-b) = 3,8766784$$
$$\log(p-c) = 2,5689066$$
$$C^t(-\log. p) = \bar{4},0745014$$
$$C^t(-\log(p-a)) = \bar{3},7980093$$
$$2\log.\tang.\frac{A}{2} = \bar{1},7998957$$
$$\log\tang\frac{A}{2} = \bar{1},8999478$$

d'où : $\frac{A}{2} = 38°27'27'',916$ par suite : $A = 76°54'55'',83$

Calcul de l'angle B.

$$\log(p-a) = 2,7201907$$
$$\log.(p-c) = 2,5689066$$
$$C^t(-\log. p) = \bar{4},0745014$$
$$C^t[-\log(p-b)] = \bar{4},1233216$$
$$2\log.\tang.\frac{B}{2} = \bar{3},4869203$$
$$\log\tang\frac{B}{2} = \bar{2},7434601$$

d'où : $\frac{B}{2} = 3°10'14'',1$ par suite : $B = 6°20'28'',2$

On déduit des valeurs des angles A et B celle de C

$$C = 180° - (A+B) = 96°44'35'',97$$

Ainsi donc :

$A = 76°54'55'',83$; $B = 6°20'28'',2$; $C = 96°44'35'',97$

Il est facile de vérifier l'exactitude de ces résultats puisqu'ils doivent satisfaire à la relation connue :

$$A + B + C = \pi$$

Problème 374.

Un côté d'un triangle a pour valeur 55m,19 les deux angles adjacents 48°52'13'' et 75°18'25'' calculer le troisième angle, les deux côtés qui le

comprennent et la surface du triangle.

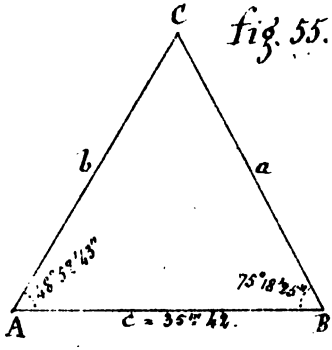


fig. 55.

Représentons par a le côté donné (voy. fig. 55) par B et C les angles. Pour trouver le troisième ; c'est-à-dire A, on aura :

$$A = 180 - (B + C) = 55°49'22''$$

De la relation connue :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$ on tire

les côtés b et c.

$$b = \frac{a \sin. B}{\sin A} \quad ; \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

Voici le type des calculs :

Calcul de b.		Calcul de c.	
log. a ...	= 1,5499436	log a	= 1,5499436
log sin 48°52'13"	= $\bar{1}$,8769232	log sin 75°18'25"	= $\bar{1}$,9855605
C^t (− log sin 55°49'22"	= 0,0823349	C^t (− log. sin. 55°49'22"	= 0,0823349
log b	= 1,5085067	log c	= 1,6177440
d'où b = 32m 2482		d'où : c = 41m, 4137	

La surface du triangle sera donnée en fonction des angles et du côté a, au moyen de la formule :

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$

Calcul de S.

2 log a	=	3,0984972
log sin 48°52'13"	=	$\bar{1}$,8769232
log sin 75°18'25"	=	$\bar{1}$,9855605
C^t (− log. 2)	=	$\bar{1}$,6989700
C^t (− log sin 55°49'22")	=	0,0823349
log S	=	2,7428858

Digitized by Google

d'où $S = 552^{mq},4507$

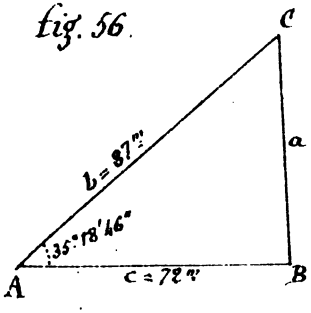
Ainsi donc ;

$$A = 55°49'22'' ; b = 32^{m},3482 ; C = 41^{m},4137$$
$$S = 552^{mq},4507.$$

Problème 375.

Dans un triangle on connaît un des angles de 35° 18' 46" et les deux côtés adjacents qui sont respectivement de 87m et de 72m. On propose de calculer la surface du triangle. On évaluera cette surface en ares et en centiares.

fig. 56.



On démontre dans les traités de Trigonométrie que lorsqu'on connaît (Voy. fig 56) deux côtés d'un triangle et l'angle compris, la surface de ce triangle est donnée par l'expression :

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

d'où on tire :

$$\log S = \log \frac{b}{2} + \log c + \log \sin A$$

Calcul de S.

log. 36	=	1.5563025
log. 87	=	1.9395193
log. sin 55° 18' 46"	=	$\bar{1}.7619576$
log S	=	3.2577794

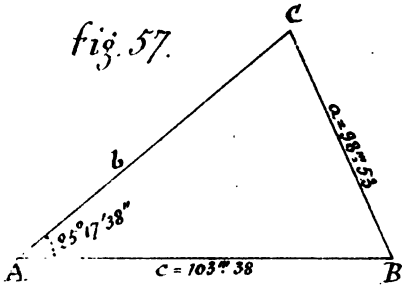
D'où S = 18 ares 10 centiares | 4032

Digitized by Google

Problème 376.

Dans un triangle ABC on donne
$AB = 103^{m}38$; $BC = 98^{m}53$; $A = 25°17'38''$
On demande de calculer le côté AC et les angles B et C

fig. 57.



Dans ce problème, on donne l'angle A (Voir fig. 57) et les deux a et c.
De la relation :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

on tire le côté $AC = b$ en posant :

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

Mais avant d'effectuer les calculs, il nous faut connaître l'angle B. Cherchons l'angle C par la relation : $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$ en remplaçant les lettres par leurs valeurs et effectuant les calculs, il viendra :

Calcul de l'angle C

log c	=	2, 0144365
log sin 25°17'38	=	$\bar{1}$ 6307026
cf. (−log a)	=	2, 0064315
log sin C	=	$\bar{1}$, 6515706

d'où $C = 26°\ 38''3$

par suite : $B = 180° - (A + C) = 128°4'19''$

Calcul de $b = AC$ au moyen de la formule : $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$

log. a	=	1,9935685
log sin 128°4'19"	=	$\bar{1}$,8961039
cf. (−log sin 25°17'38")	=	0,3690304
log. b	=	2,2587028

d'où $b = 181^{m}544$.

Digitized by Google

Ainsi donc :

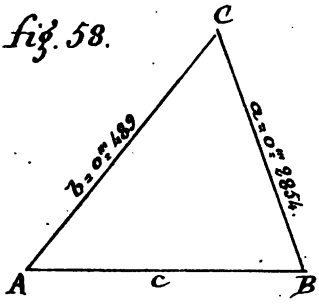
$$B = 128^\circ\ 4'\ 19'' ;\ C' = 26^\circ\ 38'\ 3'' ;\ b = 181^{m.}\ 544.$$

Problème 377.

Résoudre un triangle connaissant la surface et deux côtés.

$$a = 0^{m.}\ 2854 ;\ b = 0^{m.}\ 489 ;\ S = 0^{m.q}\ 02948$$

fig. 58.



Soit ABC (Voy fig. 58) le triangle dont on connaît les deux côtés a et b et la surface S. De la relation connue

$$2S = ab \sin C$$

On tire facilement :

$$\sin C = \frac{2S}{ab}$$

Ou bien :

$$\sin C = \frac{0,05896}{0,2854 \times 0,489}$$

Calcul de C

log 0,05896	=	2,7705575
C^t (− log. 0,2854)	=	0,5445469
C^t (− log. 0,489)	=	0,3106911
log sin C	=	1,6257946

d'où : $C = 24^\circ\ 59'\ 26'',2$

D'un autre côté on a :

$$\text{tang}\ \frac{(B-A)}{2} = \frac{b-a}{b+a}\ \cot\ \frac{C}{2}$$

Posons : $\frac{a}{b} = \text{tang.}\ \varphi$

il viendra :

$$\frac{b-a}{b+a} = \frac{1-\text{tang}\,\varphi}{1+\text{tang.}\,\varphi} = \text{tang.}\,(45-\varphi)$$

et

Digitized by Google

et l'expression ci-dessus s'écrira alors :

$$\text{tang.}\ \frac{B-A}{2} = \text{tang}\,(45^\circ - \varphi)\,\cot\frac{C}{2}$$

Calcul de φ

$$\begin{aligned} \log.\ 0{,}2854 &= \bar{1}.\,4554540 \\ \text{ct}\,(-\log.\ 9{,}459) &= 0{,}3106971 \\ \log\ \text{tang.}\ \varphi &= \bar{1}\ 7661451 \end{aligned}$$

d'où : $\varphi = 30^\circ\,16'\,10''{,}4$

Calcul de $\frac{B-A}{2}$

$$\begin{aligned} \log.\ \text{tang}\,(45^\circ - \varphi) &= \bar{1}\ 4105121 \\ \log.\ \text{cot.}\ \frac{C}{2} &= 0{,}6544132 \\ \log.\ \text{tang}\ \frac{B-A}{2} &= 0{,}0742253 \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{B-A}{2} = 49^\circ\,52'\,21''{,}1\ ;\quad \frac{B+A}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2} = 77^\circ\,30'\,17''$$

Par suite :

$$B = \frac{B+A}{2} + \frac{B-A}{2} = 127^\circ\,22'\,38''$$

$$A = \frac{B+A}{2} - \frac{B-A}{2} = 27^\circ\,37'\,55'',8$$

Nous n'avons plus qu'à déterminer le côté c au moyen de la formule :

$$C = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

Calcul du côté C

$$\begin{aligned} \log.\ 0.2854 &= \bar{1},4554540 \\ \log\ \sin.\ 34^\circ\,59'\,26'',2 &= \bar{1}.\,6258756 \\ \text{ct}\,(-\log\ \sin\ 27^\circ\,37'\,55'',8 &= 0\ 3336754 \\ \log\ c &= \bar{1}\ 4149250 \end{aligned}$$

d'où : $C = 0^{m}.\,25997$

Et nous avons donc :

$$A = 27^\circ\,37'\,55'',8\ ;\ B = 127^\circ\,22'\,38''\ ;\ C = 34^\circ\,59'\,26'',2\ ;\ c = 0^{m}.25997$$

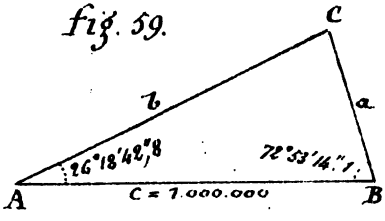
Digitized by Google

Problème 378.

Résoudre un triangle rectiligne dont on connaît :

$$A = 26°18'42''8 \; ; \; B = 72°53'14'',1 \; ; \; c = 1.000.000$$

fig. 59.



Dans le triangle ABC (voy. fig 59) l'angle C est égal à :

$$C = 180° - (A+B) = 80°48'3,''1$$

Quant aux deux côtés a et b ils seront donnés par les deux formules connues :

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C} \; ; \; b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

Ou bien en remplaçant les lettres par leurs valeurs :

$$a = \frac{1.000.000 \cdot \sin 26°18'42''8}{\sin 80°48'3'',1} \; , \; b = \frac{1.000.000 \cdot \sin 72°53'14''1}{\sin . 80°48'8''1}$$

Calcul du côté a

log 1,000,000	=	6.000,0000
log. sin 26°18'42"8	=	$\bar{1}$ 6466558
Cte (− log. sin 80°48'3"1)	=	0,0055826
log. a	=	5,6522384

d'où : $a = 448992^m$

Calcul du Côté b.

log. 1.000,000	=	6,000,0000
log sin 72°53'14,"1	=	$\bar{1}$,9803595
Cte (− log. sin 80°48'3,"1)	=	0,0055826
log b =		5,9859421

d'où : $b = 968149^m$

Problème

Digitized by Google

Problème 379.

Nous allons présenter un cas très-important, celui où l'on donne deux côtés a et b et l'angle compris C.

Des relations :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

on déduit :

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{a-b}{a+b}$$

ou bien par des transformations connues :

$$\text{tang.}\,\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\,\text{tang.}\,\frac{A+B}{2}$$

Cette formule donne : $\frac{A-B}{2}$

On aura : $\frac{A+B}{2}$ au moyen de la relation :

$$\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

Par suite :

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}$$

$$B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$$

le côté a sera donné par la formule : $c = \frac{a \sin. C}{\sin A}$

Si les deux côtés a et b sont donnés par leurs logarithmes le calcul de la fraction $\frac{a-b}{a+b}$ se simplifiera en posant :

$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{a}{b}$$

Ce qui donnera :

$$\frac{1-\frac{b}{a}}{1+\frac{b}{a}} = \frac{1-\text{tang}\,\varphi}{1+\text{tang}\,\varphi} = \text{tang}\,(\varphi - 45^\circ)$$

On aura donc pour résoudre la question l'ensemble des formules suivantes :

Digitized by Google

$$\text{tang}\ \varphi = \frac{a}{b}$$

$$\frac{AB}{2} = \text{tang.}(\varphi - 45^\circ)\ \text{tang.}\ \frac{A+B}{2}$$

Ou bien :

$$\text{tang}\ \frac{A-B}{2} = \text{tang.}(\varphi - 45^\circ)\ \text{cotang.}\ \frac{C}{2}$$

$$\frac{AB}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$$

$$C = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

Appliquons ce que nous venons de dire à un exemple numérique (1) soient les données :

$$\log a = 0,4287591 \ ; \ \log b = 0,0008764$$

$$C = 78^\circ 28' 7'',62$$

Voici le détail des calculs : Calcul de φ :

$$\begin{aligned} \log a &= 0,4287591 \\ \log b &= 0,0008764 \\ \hline \log \text{tang}\ \varphi &= 0,4278827 \\ \text{d'où : } \varphi &= 69^\circ\ 31'\ 36'',59 \\ \varphi - 45^\circ &= 24^\circ\ 31'\ 36'',59 \end{aligned}$$

Calcul de $\frac{1}{2}(A-B)$

$$\begin{aligned} \log \text{tang.}(\varphi - 45^\circ) &= \bar{1},6592428 \\ \log. \text{cotang}\ \tfrac{1}{2} C &= 0,0380012 \\ \hline \log. \text{tang}\ \frac{A-B}{2} &= \bar{1}\ 7472440 \\ \text{d'où : } \frac{A-B}{2} &= 29^\circ\ 11'\ 44'',75 \end{aligned}$$

Par suite les angles A et B sont donnés par les formules :

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = 79^\circ\ 57'\ 40'',94$$

$$B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} = 21^\circ\ 34'\ 11'',44$$

(1) Voy. annales de l'Observatoire Impérial de Paris, tom I p. 92

Digitized by Google

Calcul de c.

$$\log a = 0,4287591$$
$$\log \sin C = \bar{1},9911445$$
$$\text{C}^{\text{te}} \log.(-\log \sin A) = 0,0067003$$
$$\log c = 0,4266039$$
$$\text{d'où : } c = 2671$$

Ainsi : $A = 79° 57' 40'',94$; $B = 21° 34' 11'',44$; $c = 2.671$

Le triangle est donc résolu. Nous compléterons cet exemple en cherchant la surface S du triangle en fonction des deux côtés a et b et de l'angle compris C. On a :

$$S = \frac{1}{2}\, a\, b \sin. C$$

Calcul de S.

$$\log. a = 0,4287591$$
$$\log. b = 0,0008764$$
$$\log. \sin C = \bar{1}.9911445$$
$$\text{C}^{\text{te}} (-\log 2) = \bar{1},6989700$$
$$\log S = 0,1197500$$
$$\text{d'où : } S = 1318$$

On pourrait encore résoudre le triangle au moyen des formules :

$$c \sin A = a \sin C$$
$$c \cos A = b - a \cos C$$

divisant membre à membre, on a :

$$\text{tang.} A = \frac{a \sin C}{b - a \cos. C}$$

Ex : On donne $\log a = 0,4287591$; $b = 1,002020$; $C = 78° 28' 7'',62$

(b est donné directement). On propose de résoudre le triangle :

Calcul de $a \cos. C$

$$\log a = 0,4287591$$
$$\log \cos. C = 1.3008167$$
$$\log a \cos. C = 1.7295758$$
$$\text{d'où : } a \cos C = 0,5365075 .$$

Digitized by Google

Par suite :

$b - a\cos C = 1.002020 - 0,5365075 = 0,4655125$

Calcul de A.

$\log. a = 0,4287591$

$\log. \sin C = 1,9911445$

$C^{te} - \log.(b - a\cos C) = 0,3320687$

$\log. \tang A = 0,7519723$

D'où : $A = 79° 57' 40'',95$

Pour calculer le côté c on se servirait de la formule dont on a fait usage dans la première méthode. Quant à l'angle B, il est donné par la relation connue :

$$B = 180° - (A + C)$$

ou :

$$B = 180° - 158° 25' 48'',57 = 21° 34' 11'',43$$

Exemples de Résolution de Triangles lorsque les données ne sont pas toutes des Côtés ou des Angles.

Problème 380.

On propose de résoudre un triangle ABC, dans lequel on connaît deux angles A et B et la surface du triangle.

Le troisième angle sera donné par la relation :

$$C = 180° - (A + B)$$

En désignant par S la surface du triangle, on

Digitized by Google

aura :

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$$

d'où on tire facilement :

$$a^2 = \frac{2 S \sin A}{\sin B \sin C}$$

par suite :

$$a = \sqrt{\frac{2 S \sin A}{\sin B \sin C}}$$

Lorsqu'on aura calculé le côté par cette formule, on déterminera les deux autres côtés b et c du triangle au moyen des relations connues :

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A} \; ; \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

Problème 381.

Résoudre un triangle ABC, connaissant les deux angles A et B ainsi que le périmètre $2p = (a+b+c)$

Le troisième angle C est donné par la relation :

$$C = 180° - (A + B)$$

Des relations :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

on déduit d'après un théorème connu :

$$\frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

relation qui est égale à chacun des trois quotients :

$$\frac{a}{\sin A}, \quad \frac{b}{\sin B}, \quad \frac{c}{\sin C}$$

De plus si l'on observe que :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

il vient :

Digitized by Google

$$a = p\,\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \qquad b = p\,\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}.$$

$$c = p\,\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

Après avoir calculé le côté a par la première des formules ci-dessus, on aurait pu déterminer les côtés b et c au moyen des formules :

$$b = \frac{a \sin. B}{\sin A}\,; \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

Problème 382.

Résoudre un triangle ABC, dans lequel on connaît les deux angles A et B le rayon R du cercle inscrit au triangle.

Le troisième angle C est donné par la relation :

$$C = 180° - (A + B)$$

De plus les relations :

$$p - a = R \cot. \frac{A}{2}\,; \; p - b = R \cot. \frac{B}{2}\,; \; p - c = R \cot \frac{C}{2}\,;$$

permettent de calculer les différences :

$$p - a\,; \; p - b\,; \; p - c$$

$\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$

Et d'autre part comme on a :

$$p = (p-a) + (p-b) + (p-c)$$

Il sera facile de déduire les valeurs des trois côtés a, b, c du triangle.

Problème

Digitized by Google

Problème 383

Résoudre un triangle ABC connaissant les angles ABC et le périmètre ($2p = a + b + c$)

Les formules :

$$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\cos\frac{C}{2} \quad \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

donnent en les multipliant entre elles :

$$\cos\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{C}{2} = \frac{p}{a}\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} = \frac{p}{a}\sin\frac{A}{2};$$

par une simple changement de lettres on obtient les autres relations :

$$\cos\frac{B}{2} \quad \cos\frac{A}{2} = \frac{p}{c}\sqrt{\frac{(p-b)(p-a)}{ac}} = \frac{p}{c}\sin\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{A}{2} \quad \cos\frac{C}{2} = \frac{p}{b}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} = \frac{p}{b}\sin\frac{B}{2}$$

de ces trois relations on tire pour les valeurs des côtés a, b, c.

$$a = \frac{p.\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}, \quad b = \frac{p.\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}}, \quad c = \frac{p.\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}$$

Problème 384.

Résoudre un triangle connaissant les trois hauteurs.

Désignant par h la hauteur tombant sur le côté a, h' sur le coté b et h'' sur le coté c, On aura évidemment :

$$ah = bb' = ch''$$

Ce qui peut s'écrire ainsi.

$$\frac{a}{\frac{1}{h}} = \frac{b}{\frac{1}{h'}} = \frac{c}{\frac{1}{h''}}$$

soit.

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = \frac{2}{K} \text{ et } 2p = a + b + c.$$

Digitized by Google

il viendra alors, en vertu d'un Théorème connu :

$$\frac{a}{\frac{1}{b}} = \frac{p}{\frac{1}{K}} = \frac{p-a}{\frac{1}{K}-\frac{1}{b}} = \frac{p-b}{\frac{1}{K}-\frac{1}{b'}} = \frac{p-c}{\frac{1}{K}-\frac{1}{b''}}$$

Mais l'angle A est donné par la formule :

$$\text{tang.}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

les quantités p, $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$ peuvent être remplacées par les quantités $\frac{1}{K}$, $\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{b}\right)$, $\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{b'}\right)$, $\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{b''}\right)$ qui leur sont proportionnelles ; il viendra donc :

$$\text{tang.}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{b'}\right)\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{b''}\right)}{\frac{1}{K}\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{b}\right)}}$$

pour les angles :

B et C on aura :

$$\text{tang.}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{b'}\right)\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{b''}\right)}{\frac{1}{K}\left(\frac{1}{K}-\frac{1}{b''}\right)}}$$

Les trois côtés du triangle seront donnés par les formules :

$$a = \frac{b'}{\sin C'} \; ; \quad b = \frac{b}{\sin C'} \; ; \quad c = \frac{b}{\sin B}$$

Problème 385.

On donne dans un triangle deux côtés et l'angle compris. On propose de calculer directement le troisième côté.

Désignons par a, b les deux côtés et par suite C l'angle qu'ils comprennent, on aura :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

ou :

Digitized by Google

$$c^2 = (a^2 + b^2)\left(\cos^2 \frac{c}{2} + \sin^2 \frac{c}{2}\right) - 2ab\left(\cos^2 \frac{c}{2} - \sin^2 \frac{c}{2}\right)$$

Ou encore :

$$c^2 = (a^2 - b^2)^2 \cos^2 \frac{c}{2} + (a+b)^2 \sin^2 \frac{c}{2}$$

d'où :

$$c = (a+b) \sin \frac{c}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \cot^2 \frac{c}{2}}$$

Posons :

$$\text{tang.}\, \varphi = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{c}{2}$$

L'expression qui donne c deviendra alors :

$$c = (a+b) \sin \frac{c}{2} \sqrt{1 + \text{tang.}^2 \varphi}$$

ou :

$$c = (a+b) \sin \frac{c}{2} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi}}$$

ou encore :

$$c = (a+b) \sin \frac{c}{2} \times \frac{1}{\cos \varphi}$$

Enfin :

$$c = \frac{(a+b) \sin \frac{c}{2}}{\cos \varphi}$$

Problème 386.

Résoudre un triangle, connaissant C, le côté opposé c et la somme ou la différence des deux autres côtés du triangle.

Des relations :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

on déduit, en vertu d'un théorème connu :

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A+B)}{2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin C} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(A-B) \cos \frac{1}{2}(A+B)}{2 \sin \frac{1}{2} C \frac{1}{2} C}$$

ou

Digitized by Google

on a cause de :

$$\frac{1}{2}(A+B) = 90^\circ - \frac{1}{2}C$$

$$(1)\ \frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}\ ;\quad (2)\ \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C}$$

Si $a+b$ est donné on emploiera la formule (1). qui donnera $c.\frac{1}{2}(A-B)$ comme on connaît $\frac{1}{2}(A+B)$ les angles A et B seront égaux à :

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}$$

$$B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$$

On achèvera la solution au moyen de la formule (2) qui donnera $a-b$ et comme on connaît $a+b$ on aura pour déterminer les deux côtés a et b

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$$

$$b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2},$$

Si au contraire $a-b$ était donné on déterminerait $\frac{1}{2}(A-B)$ au moyen de la formule (2) qui donnerait :

$$\sin\frac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{c}\cos\frac{1}{2}C$$

Comme on connaît $\frac{1}{2}(A+B)$ on aura pour A et B :

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}$$

$$B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$$

On aura ensuite a et b en calculant $a+b$ au moyen de la formule (1) qui donne :

$$a+b = c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C}$$

Digitized by Google

suite :

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$$

$$b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$$

Problèmes divers.

Problème 387.

Calculer l'angle au centre d'un secteur circulaire AOB sachant que le volume du secteur sphérique engendré par la révolution de ce secteur circulaire autour du rayon OA est le tiers du volume entier de la sphère.

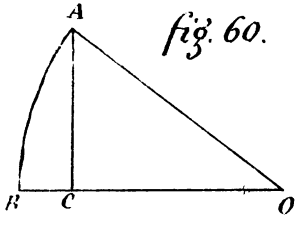


fig. 60.

En supposant le rayon R = 1 le volume de la sphère sera égal à $\frac{4}{3}\pi$. Abaissant AC sur le rayon OB, le volume du secteur sera :

$$V = \frac{2}{3}\pi BC.$$

Mais : $BC = OB - OC = 1 - OC$

et si nous appelons x l'angle cherché nous aurons dans le triangle rectangle AOC : (voy. fig. 60.)

$$OC = OA \cos x = \cos x \quad \text{puisque } OA = 1$$

donc :

$$BC = 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$$

par suite l'équation du problème est :

$$\frac{1}{3}\pi = \pi \sin^2 \frac{x}{2}$$

ou :

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$$

d'où :

$$\log. \sin. \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} \text{ c}^{\text{te}} (-\log. 3)$$

Digitized by Google

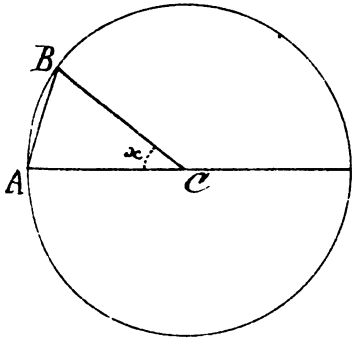
On aura donc :

$$\frac{x}{2} = 35^\circ\ 15'\ 53'',53 \quad \text{Donc } x = 70^\circ\ 31\ 47\ 46$$

Problème 388.

Calculer à un dixième de seconde près l'angle que doivent faire deux rayons d'un cercle, pour que la surface du triangle formé par ces deux rayons et par la corde qui joint leurs extrémités soit égale au 12e du cercle.

fig. 61.



Désignons par x l'angle inconnu, on sait que la surface d'un triangle est donnée en fonction des deux côtés et de l'angle qu'ils comprennent par la formule :

$$S = \frac{1}{2}\ a\,b \sin. C.$$

La figure (61) ci-jointe fait voir que :

$$a = b = R,\ C = x$$

l'expression ci-dessus pourra donc s'écrire :

$$S = \frac{1}{2}\ R^2 \sin x$$

et comme la valeur de cette expression doit être égale au douzième du cercle, c'est-à-dire à $\frac{\pi R^2}{12}$ on aura l'équation :

$$\frac{1}{2}\ R^2 \sin x = \frac{\pi R^2}{12}$$

d'où on tire :

$$\sin. x = \frac{\pi}{6}$$

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Digitized by Google

Calcul de x.

$$\log \pi = 0,4971509$$
$$\text{ct}\,(-\log 6) = \bar{1},2218487$$
$$\sin x = \bar{1},7189996$$

d'où : $x = 31° \; 34' \; 27'',1$

Problème 389.

La bissectrice de l'angle droit d'un triangle rectangle partage l'hypoténuse en deux segments inégaux dont les longueurs sont : 4m 319 et 5m 238. On propose de calculer les angles de ce triangle.

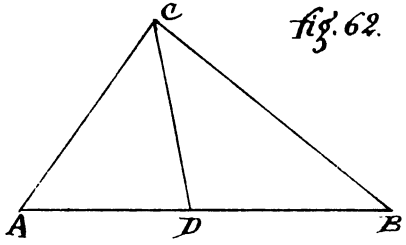


fig. 62.

Soient a et b les deux côtés du triangle rectangle ABC, m et n les deux segments : AD et DB on aura : (Voy. fig. 62)

$$\text{tang}\, A = \frac{a}{b} = \frac{n}{m} = \frac{5238}{4319}$$

On aura donc :

Calcul de A.

$$\log. 5238 = 3,7191655$$
$$\text{ct}\,(-\log. 4319) = \bar{1},3646168$$
$$\log \text{tang} A = 0,0837823$$

d'où $A = 50° \; 29' \; 33'' 6$

par suite :

$$B = 90° - A = 39° \; 30' \; 26'',4.$$

Problème 390.

La perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle sur l'hypo-

Digitized by Google

tionne la partage en deux segments dont les longueurs sont : 3m 343 et 4m. 928. On propose de calculer les angles de ce triangle.

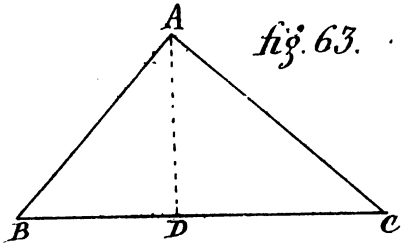


fig. 63.

Le triangle ABC étant rectangle (Voy. fig 63). on a :

$$AD = BD \text{ tang } B$$

d'où :

$$\text{tang } B = \frac{AD}{BD} = \frac{\sqrt{BD \times DC}}{BD} = \sqrt{\frac{DC}{BD}}$$

Calcul de B.

log. 4, 928	=	0, 692 6707
c^t (− log. 3, 643)	=	$\bar{1}$, 438 5408
2 log tang B	=	0, 131 2115
log tang B	=	0, 065657

d'où : B = 49° 18' 40", 5

par suite :

$$C = 90° - B = 40° 41' 19",5$$

Problème 391

On donne dans un triangle ABC : l'angle B égal à 68° 26' 17" l'angle C égal à 75° 8' 23" et sa hauteur AH égale à 148m, 19. On demande de calculer les longueurs des trois côtés.

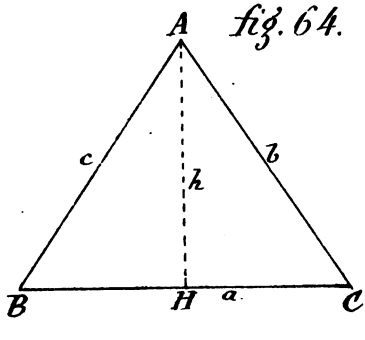


fig. 64.

Soient a, b, c les trois côtés du triangle

et désignons la hauteur par h. L'angle est égal à :

$$A = 180 - (B + C) = 36° 25' 20''$$

Pour déterminer les côtés du triangle, nous considérons d'abord les triangles (Voy. Fig. 64) rectangles ABH, AHC. Le triangle rectangle ABH donne :

$$h = c \sin B$$

de même le triangle AHC donne :

$$h = b \sin C$$

De ces deux relations on tire :

$$c = \frac{h}{\sin B}; \quad b = \frac{h}{\sin C}$$

Calcul de c

$$\log h = \log 148^m 19 = 2,1703129$$
$$C^t - (-\log \sin C) = C^t (-\log \sin 75° 823'') = 0,0147738$$
$$\log c = 2,1855927$$

d'où $c = 159^m 318$

Calcul de b

$$\log h = \log 148^m 19 = 2,1708189$$
$$C^t (-\log . \sin B) = C^t (-\log \sin 68° 26' 17'') = 0,0315073$$
$$\log b = 2,2023262$$

d'où $b = 159^m 340$

Il nous reste maintenant à calculer le troisième côté a :

Dans le triangle ABC on a la relation

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

de laquelle on tire :

$$a = \frac{b \sin A}{\sin b}$$

Calcul de a

$$\log b = \log . 159^m 340 = 2,2023262$$
$$\log \sin A = \log . \sin 36° 25' 20'' = \bar{1},7735897$$
$$C^t (-\log \sin B) = C^t (-\log \sin 68° 26' 17'') = 0,0315073$$

[illegible]

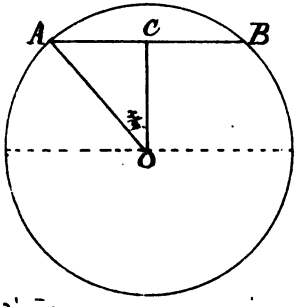
Digitized by Google

D'où : $a = 100^{m}\ 8$.

Problème 392.

Calculer le nombre de degrés, minutes et secondes contenues dans un arc de cercle, sachant que la corde qui le sous-tend est égale aux $\frac{2}{3}$ du diamètre.

fig. 65.



Soit AB la corde donnée, appelons x l'angle cherché, dans le triangle AOC, on a :

$AC = AO \sin AOC$

Mais AC (voy. fig. 65) est égal à $\frac{2}{3}$ R puisque $AC = \frac{AB}{2}$.

Donc on aura l'équation suivante :

$$\frac{2}{3} R = R \sin \frac{x}{2}$$

d'où :

$\sin \frac{x}{2} = \frac{2}{3}$ par suite : $x = 83°\ 37'\ 14'',32$

Problème 393.

L'un des angles d'un losange circonscrit à un cercle de 68^{m} de rayon est égal à $43°\ 24'\ 37''$; calculer à un décimètre carré près, la surface du losange.

La surface du losange est double du triangle ABC, (voy. fig. 66). On aura en désignant par S la surface cherchée :

$$S = 2 \times ABC$$

Mais $ABC = OB \times AC$

Mais on voit que :

Digitized by Google

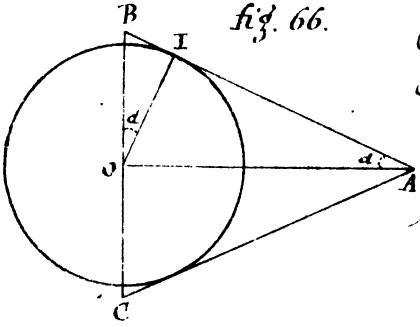


fig. 66.

$$OB = \frac{OI}{\cos\alpha} \; ; \; OA = \frac{OI}{\sin\alpha}$$

Par suite :

$$ABC = \frac{\overline{OI}^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{2\,\overline{OI}^2}{\sin 2\alpha}$$

donc :

$$S = \frac{4.\overline{OI}^2}{\sin 2\alpha} = \frac{4 \times \overline{68}^2}{\sin 2 \times 43°24'37''}$$

Calcul de S.

log 4	= 0,6020600
2 log 68	= 3,6650178
Ct (− log sin 86° 49' 14")	= 0,0066690
log S =	4,2677468

d'où :

$$S = 18525^{mq},5$$

Problème 394.

Calculer le volume du solide décrit par le secteur circulaire AOB, tournant autour de AO ; on supposera que l'angle AOB est de 55° et que le rayon AO est égal à 7m,34.

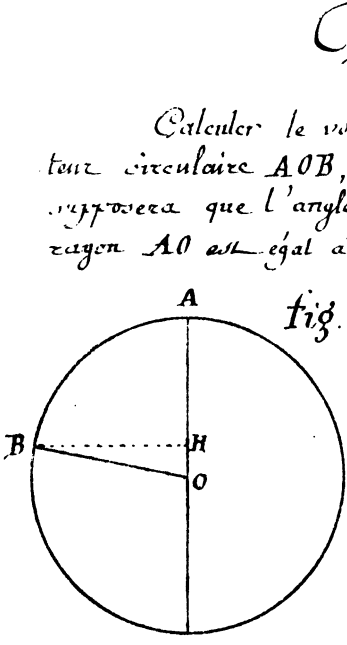


fig. 67.

On prend B de l'arc AB (voy. fig. 67) abaissons BH perpendiculaire sur AO, soit R le rayon de la sphère, α l'angle AOB on aura pour l'expression du volume cherché :

$$V = \frac{R}{3} \times (\text{zône } AB)$$

Mais la zône AB a pour

expression :

$$2\pi R \times AH$$

Cherchons AH :

$$AH = R - OH = R - R\cos\alpha = R(1-\cos\alpha) =$$
$$= 2R\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

Par suite :

$$AB = 4\pi R^2 \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

il s'en suit que :

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Calcul de V.

log 4	=	0, 6020600
log π	=	0, 4971499
3 log 7m54	=	2, 5970883
2 log sin 27°30'	=	$\bar{1}$, 3288112
ct (− log 3)	=	$\bar{1}$, 5228787
log V	=	2, 5479791

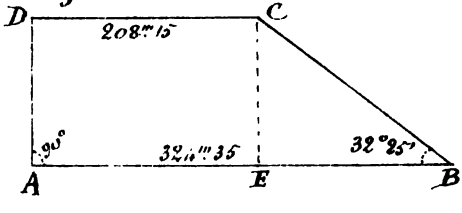
d'où V = 353 m.cub 174

Problème 395.

Calculer la surface d'un trapèze ABCD dans lequel on a :

$$A = 90°;\ B = 32°25';\ AB = 324^m.35;\ CD = 208^m.15$$

fig. 68



Du point C abaissons une perpendiculaire EC sur AB (voy fig. 68)

AE = DC

par conséquent :

EB = 324m.35 − 208m15 =

= 116m.20

Dans le triangle CEB, nous avons :

CE = EB tang B.

Digitized by Google

Donc pour avoir la surface du trapèze, il suffira de multiplier la demi somme des bases parallèles AB, CD par CE hauteur du trapèze, en désignant par S cette surface, nous aurons :

$$S = \frac{1}{2}(324^{m},35 + 208^{m},15) \times 116^{m},20 \times \text{tang } 32^{\circ}25'$$

Calcul de S.

$$\begin{aligned} \log. 266,25 &= 2,4252896 \\ \log 116,20 &= 2,0652061 \\ \log. \text{tang. } 32^{\circ}25' &= \bar{1},8027925 \\ \log S &= 4,2932882 \end{aligned}$$

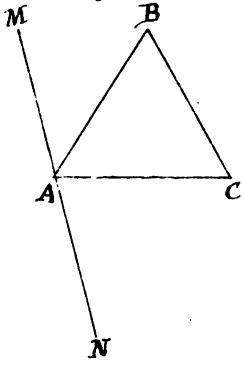
d'où : $S = 19646^{mq},6380$

Telle est la surface du trapèze ABCD.

Problème 396

Par le sommet A du triangle équilatéral ABC dont le côté est de $253^{m},46$, on mène la droite MN située dans le plan du triangle et inclinée de 45° sur le côté AB. On demande de calculer le volume du corps engendré par la révolution du triangle tournant autour de MN.

fig. 69.



Des sommets B et C abaissons des perpendiculaires sur l'axe MN, appelons b et c ces perpendiculaires β et γ les distances du point A au pied de chacune d'elles (voy. fig. 69). Le volume engendré par le triangle ABC, s'obtiendra en retranchant du tronc de cône qui a pour bases πb^2 et πc^2 et pour hauteur $\beta + \gamma$ les deux cônes qui ont, l'un πb^2 pour base et β pour hauteur, en désignant par V le volume demandé

nous aurons :

$$[1]\quad V = \frac{\pi}{3}(b^2 + c^2 + \beta c) - \frac{\pi}{3} b^2 \beta - \frac{\pi}{3} c^2 \gamma$$

$$[2]\quad V = \frac{\pi}{3}[(c^2 + bc)\beta + (b^2 + bc)\gamma]$$

$$[3]\quad V = \frac{\pi}{3}(c + b)(\beta c + b\gamma)$$

Le triangle ABC est ainsi la différence qui existe entre le trapèze qui a pour bases b et c et pour hauteur $\beta + \gamma$ et les triangles qui ont pour bases et pour hauteurs l'un b et β, l'autre c et γ, en désignant donc par S la surface du triangle, nous aurons :

$$2S = (b+c)(\beta+\gamma) - b\beta - c\gamma$$

Ou bien :

$$[4]\quad 2S = \beta c + b\gamma$$

Remplaçant dans l'Equation [3] le facteur : $\beta c + b\gamma$ par $2S$ on arrive à la formule :

$$V = \frac{2\pi}{3}(c + b)S$$

On obtient la surface S du triangle équilatéral par la formule :

$$S = \frac{(235^m,46)^2\sqrt{3}}{4}$$

pour les hauteurs b et c nous aurons :

$$b = 235,46 \sin 45^\circ ;\quad c = 235,46 \sin 75^\circ ;$$

donc :

$$b + c = 235,46(\sin 45^\circ + \sin 75^\circ)$$

mais :

$$\sin 45^\circ + \sin 75^\circ = 2 \sin 60^\circ \cos 15^\circ$$

donc enfin :

$$V = \frac{2\pi}{3} \times 235,46 \times 2 \sin 60^\circ \cos 15^\circ \times \frac{(235,46)^2}{4}\sqrt{3}$$

ou bien :

$$V = \frac{\pi}{\sqrt{3}}(235,46)^3 \sin 60^\circ \cos 15^\circ$$

Calcul de V.

Digitized by Google

Calcul de V.

log. π	=	0,4971509
3 log. 23,546	=	7,1157313
log. sin 60°	=	$\bar{1}$,9375306
log cos 15°	=	$\bar{1}$,9844438
Ct (−½ log. 3)	=	$\bar{1}$,7614394
log V	=	7,2968160

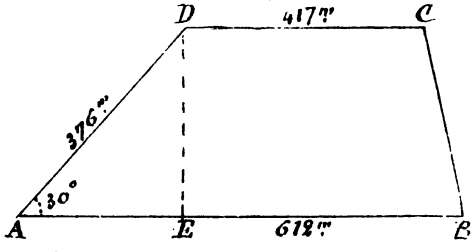
d'où :

$$V = 19806877^{m.cub}$$

Problème 397.

Dans le trapèze ABCD on connaît les deux côtés parallèles AB et CD qui sont le premier de 612 m, le second de 417 m on connaît aussi le côté AD de 376 m. et l'angle A de 30°. Trouver la surface du trapèze.

fig. 70.



Du point D abaissons la perpendiculaire DE sur la base AB, nous aurons dans le triangle rectangle DAE (Voy. fig. 70)

DE = 376m sin 30°

Or bien à cause de sin 30° = ½

$$DE = \frac{376}{2}$$

La surface du trapèze ABCD sera donc égale à :

$$S = \left(\frac{612+417}{2}\right) \times \frac{376}{2} = 519,5 \times 188 = 97666^{m\,q}$$

Telle est la surface du trapèze.

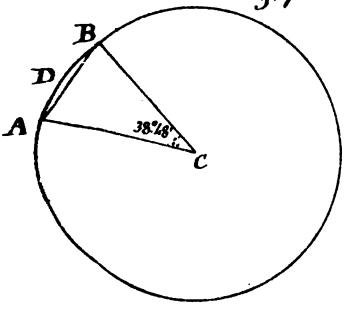
Problème

Digitized by Google

Problème 398.

Dans un cercle dont le rayon est de 48m. 715, on prend un arc de 38° 48' et on joint les deux extrémités de cet arc par une corde; on demande de calculer à un centimètre carré près la surface du segment compris entre l'arc et la corde.

fig. 71.



Le secteur ABCD (voy. fig. 71) a pour mesure $\frac{\pi r^2 \times 38° 48'}{360°}$; le triangle isocèle formé par les deux rayons menés du point C aux deux pointes A et B et par le cercle AB a évidemment pour mesure :

$$\frac{r^2 \sin 38° 48'}{2}.$$

La surface du segment est égal à la différence des deux expressions ci-dessus, on aura donc, en désignant par S la surface cherchée.

$$S = \frac{\pi r^2 \times 38° 48'}{360} - \frac{r^2}{2} \sin 38° 48'$$

Calcul du Secteur ABCD.

	log. π	= 0, 4971509
49	log 2328	= 3. 3669830
	2 log. 48,715	= 3. 3753254
	Ct (− log. 21600)	= $\bar{5}$. 3665462
	log. Surf. ABCD	= 2. 9050055

D'où : Surface du Secteur = 803 mq 5362.

Calcul du Triangle ABC.

	2 log 48m,715	= 3. 3753254
	log sin. 38° 48'	= $\bar{1}$. 7969930
	Ct (− log. 2)	= $\bar{1}$. 6989700
	log. Surf. ABC	= 2, 8712884

D'où :

Digitized by Google

d'où.

$$\text{Surf. } ABC = 743^{mq}.51$$

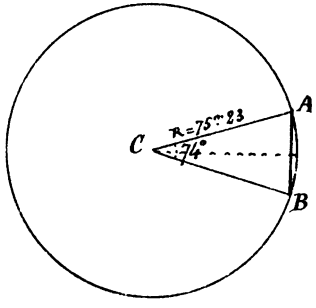
Par suite :

$$S = 803^{mq}.54 - 743^{mq}.51 = 60^{mq}.03$$

Problème 399.

Trouver la valeur en mètres à 0,01 près, de la corde qui sous tend un arc de 14° dans le cercle dont le rayon est égal à 475m,23.

fig. 72.



Une corde étant, comme on le sait, le double du sinus de la moitié de l'arc sous-tendu dans le cercle dont le rayon égale l'unité (Voy. fig. 72) nous aurons pour la valeur cherchée :

$$L = 2 \times 475^{m}.23 \sin 7^{\circ}$$

Ou bien :

$$L = 950^{m}.46 \sin . 7^{\circ}$$

L désigne ici la longueur de la corde.

Calcul de L.

$$\log. 950^{m}46 = 2,9779338$$
$$\log. \sin. 7^{\circ} = \bar{1},0858945$$
$$\log. L = 2,0638283$$

D'où on tire :

$$L = 115^{m}.83$$

Problème 400

Dans un triangle ABC rectangle en A, l'angle

Digitized by Google

B est de 60° et le côté AB = 50m. On divise l'angle B en deux parties égales par la droite BO et l'on demande à 0.01 près les valeurs des segments CO, AO dans lesquels cette droite divise le coté AC.

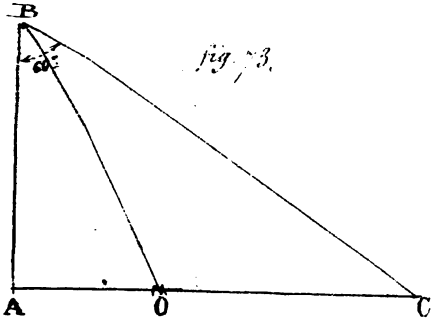


fig. 73.

Dans le triangle ABC et l'angle en A (voy. fig. 73) le coté AC opposé à l'angle B sera donné par la formule comme :

$$AC = AB \text{ tang. } B.$$

Ou bien en remplaçant AB et tang. B par leur valeur AO · 50m a ... 60°

Calcul de AC.

$$\begin{aligned} \log 50^m &= 1,6989700 \\ \log \text{tang } 60^\circ &= 0,2385606 \\ \hline \log AC &= 1,9375306 \end{aligned}$$

par suite AC = 86m 69

Dans le triangle ABO rectangle en A on a de même :

$$AO = AB \text{ tang } \frac{B}{2}$$

Ou bien :

$$AO = 50^m \text{ tang } 30$$

Calcul de AO.

$$\begin{aligned} \log 50^m &= 1,6989700 \\ \log \text{tang } 30^\circ &= \bar{1},7614394 \\ \hline \log AO &= 1,4604094 \end{aligned}$$

par suite :

$$AO = 28^m 87 \; ; \; BO = 86^m 69 - 28^m 87 = 57^m 82$$

Ainsi les segments ont pour valeur :

$$AO = 28^m 87 ; \; BO = 57^m 82.$$

Digitized by Google

Problème 1101.

Dans un triangle ABC, les côtés AB, AC sont égaux chacun à 1m, l'angle A est égal à 30°. On propose de calculer la surface engendrée par le côté BC, si le triangle tournait autour d'une droite AK, menée dans son plan, perpendiculairement à AC.

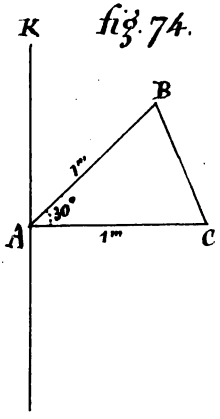


fig. 74.

La surface engendrée par le côté BC est la surface latérale d'un tronc de cône, ayant pour base inférieure un cercle dont le rayon est AC et pour base supérieure un second cercle dont le rayon est la perpendiculaire BK abaissée du point B sur l'axe de rotation. Cette perpendiculaire est donnée par l'expression: (Voy fig 74)

$$BK = AB \cos 30° = \cos 30° \text{ puisque: } AB = 1^m$$

Quant aux côtés BC, il sera donné par la formule connue:

$$BC = \frac{AB \sin 30°}{\sin 75} = \frac{\sin 30°}{\sin 75}$$

à cause de: $AB = 1^m$

D'un autre côté la surface engendrée par le côté BC égale la somme des circonférences des cercles qui servent de base au tronc de cône, multipliée par la moitié de BC, par conséquent, si nous désignons par S la surface cherchée, nous aurons:

$$S = 2\pi\left(\frac{1+\cos 30°}{2}\right) \times \frac{\sin 30°}{\sin 75°}$$

ou bien:

$$S = 2\pi \frac{\cos^2 15° \sin 30°}{\sin 75°} = 2\pi \sin 75° \sin 30°$$

puisque:

$$\frac{1+\cos 30°}{2} = \cos^2 15° = \sin 75°$$

Digitized by Google

Calcul de S.

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0,3010300 \\
\log \pi &= 0,4971509 \\
\log \sin 75^\circ &= \bar{1},9849438 \\
\log \sin 30^\circ &= \bar{1},6989700 \\
\hline
\log S &= 0,4820947
\end{aligned}$$

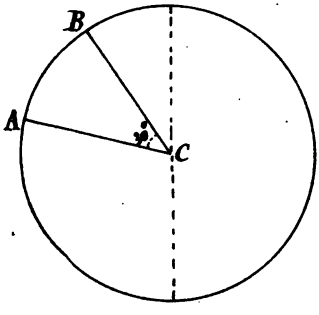
d'où :

$$S = 1^{mq}0035$$

Problème 402.

On demande de calculer le volume d'un secteur sphérique engendré par un secteur circulaire dont l'angle serait de 30° le rayon de la sphère étant égal à 1m. (Le secteur circulaire tourne autour du rayon pour l'une des extrémités de son arc)

fig. 75.



On sait qu'un secteur sphérique a pour mesure les $\frac{2}{3}$ du grand cercle de la sphère multiplier par la portion de l'axe comprise entre les perpendiculaires abaissées des extrémités de l'arc sur cet axe; le rayon de la sphère étant égal à 1m. en passant par l'extrémité de l'axe du secteur, on a pour la portion de l'axe comprise entre les perpendiculaires extrêmes (Voy fig. 75)

$1 - \cos 30^\circ$ et par suite pour le volume cherché :

$$V = \frac{2}{3}\pi l^2(1 - \cos 30^\circ) = \frac{2}{3}\pi . 2 \sin^2 15^\circ$$

Digitized by Google

puisqu'on a :

$$30^{\circ} = 2 \sin^2 15^{\circ}$$

V peut enfin s'écrire ainsi qu'il suit :

$$V = \frac{4}{3} \pi \sin^2 15^{\circ}$$

Calcul de V

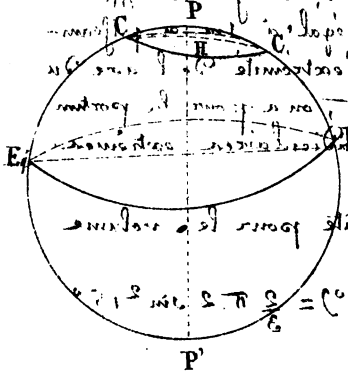
log 4	=	0,6020600
log π	=	0,4971509
2 log sin 15	=	2,8259914
C^E (log 3)	=	$\bar{1}$,5228787
log V	=	$\bar{1}$,4480820

V = 28060

Problème 403

Calculer en myriamètres carrés la surface de l'une des deux zones glaciales, sachant que le parallèle qui lui est de base est de 23°30' du pôle, on suppose que la surface de la terre est exactement sphérique et que la circonférence d'un grand cercle est 4000 myriamètres.

fig. 76



La surface d'une calotte sphérique a pour mesure la circonférence d'un grand cercle multipliée par la hauteur de la calotte ; si donc nous désignons par S cette surface, nous aurons :

(Voy. fig. 76)

$$S = 4000 \times H$$

H désignant la hauteur de

la calotte. Déterminons cette dernière quantité :

$$H = R(1 - \cos 23^\circ 30') = R \times 2 \sin^2 11^\circ 45'$$

puisque :

$$1 - \cos 23^\circ 30' = 2 \sin^2 11^\circ 45'.$$

D'un autre côté :

$$R = \frac{4000}{2\pi} \quad \text{Donc : } H = \frac{4000 \sin^2 11^\circ 45'}{\pi}$$

Par suite la surface cherchée est :

$$S = \frac{4000^2 \sin^2 11^\circ 45'}{\pi}$$

Calcul de S

$$\begin{aligned} 2 \log. 4000 &= 7,2041200 \\ 2 \log. \sin. 11^\circ 45' &= \bar{2},6177336 \\ \text{Cte} (-\log. \pi) &= \bar{1},5028491 \\ \log. S &= 5,3247027 \end{aligned}$$

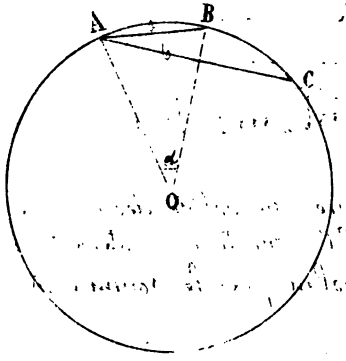
D'où :

$$S = 211204 \text{ myr}$$

Problème 404

Dans un cercle O, la corde AB est égale à $3^m 275$; la corde AC qui sous-tend un arc double de l'arc AB est égale à $4^m 120$, calculez à $0^m 001$ près le rayon du cercle ?

fig. 77.



Désignons par a et par b les deux cordes AB et AC, (Voy. Fig. 77), par α l'angle au centre sous-tendu par la corde AB et enfin par R le rayon du cercle, nous aurons les équations suivantes :

[1] $2R \sin \frac{\alpha}{2} = a$

[2] $2R \sin \alpha = b$

$2R = \frac{b}{\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}}$

Digitized by Google

Cette dernière équation peut s'écrire :

$$[3] \quad 4R \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} = b$$

puisque $\sin\alpha = 2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}$

Elevons les deux membres de l'équation : [3] au carré, il vient :

$$16 R^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\alpha}{2} = b^2$$

Ou bien :

$$16 R^2 \sin^2\frac{\alpha}{2} \left(1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\right) = b^2$$

à cause de :

$$1 - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

Substituant enfin la valeur de $\sin\frac{\alpha}{2}$ tirée de l'équation [1] on a :

$$R^2 = \frac{a^4}{4a^2 - b^2}$$

d'où :

$$R = \frac{a^2}{\sqrt{(2a+b)(2a-b)}}$$

Remplaçant a et b par leurs valeurs on a :

$$R = \frac{3^m\ 272^2}{\sqrt{10,670 \times 2,430}}$$

Calcul de R

$$2 \log. 3,275 = 1,0304226$$
$$C^t\left(-\frac{1}{2} \log. 10,670\right) = \bar{1},4859178$$
$$C^t\left(-\frac{1}{2} \log. 2.430\right) = \bar{1},8071969$$
$$\log R = 0,3235373$$

d'où :

$$R = 2^m\ 11$$

Problème 405.

Calculer le volume du solide décrit par un triangle équilatéral ABC qui tourne autour d'une droite MN située dans son plan par le sommet A, de

Digitized by Google

manière à faire avec le côté AC un angle égal à 18°. On supposera le triangle égal à $7^{m}35$.

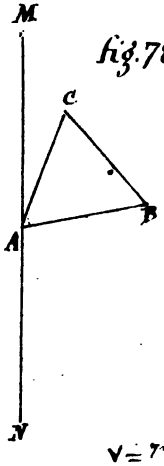


fig. 78.

Le volume engendré par le triangle ABC (voy. fig. 78) tournant autour de la droite MN a pour mesure la surface du triangle multipliée par la circonférence de la moyenne distance des trois sommets du triangle à l'axe. Ces distances sont :

$$A = 0 ; B = 7^{m}35 \sin 78° ; C = 7^{m}35 \sin 18°$$

Si donc nous désignons par V le volume cherché, nous aurons :

$$V = \text{Surf. tr. } ABC \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\pi (7^{m}35)(\sin 18° + \sin 78°)$$

Ou bien :

$$V = 7^{m}35 \sqrt{3} \times \frac{2}{3}\pi\, 7^{m}35 \left[2 \sin \tfrac{1}{2}(18 + 78°) \cos \tfrac{1}{2}(78° - 18°)\right]$$

Ou enfin :

$$V = \pi \frac{\overline{7^{m}35}^{2}}{\sqrt{3}} \sin 48° \cos 30°$$

Calcul de V.

log. π	=	0, 4971499
3 log. $7^{m}35$	=	2, 5983619
log. sin. 48°	=	$\bar{1}$, 8710735
log. cos. 30°	=	$\bar{1}$, 9375300
Ct $(-\frac{1}{2}$ log 3)	=	$\bar{1}$, 7614394
log. V	=	2, 6660563

D'où :

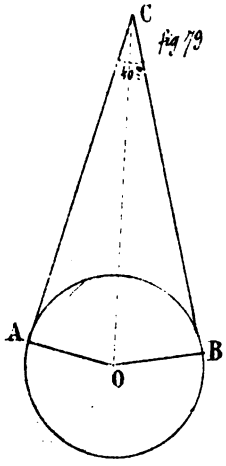
$$V = 463^{m}.507$$

Problème 406.

Le rayon d'un cercle étant 1m on propose de calculer à 0mg,001 près l'aire comprise entre deux tangentes qui font un angle de 40° et l'arc du cercle

Digitized by Google

qui se termine aux deux points de contact ?



La figure formée par les deux rayons (Voy. Fig. 79) menés aux points de contact et les deux tangentes, est une quadrilatère. La différence entre le quadrilatère et le secteur formé par l'arc compris entre les points de tangence, égale la surface cherchée.

Soit maintenant x la longueur de la tangente ; cette tangente est le côté d'un triangle rectangle adjacent à un angle de 20° ; l'autre côté de l'angle droit est égal au rayon du cercle donné, nous désignerons ce rayon par R. La longueur x de la tangente est donnée par la formule :

$$x = R \text{ cotang. } 20°$$

Multipliant le second membre de cette égalité par $\frac{R}{2}$ nous aurons pour expression de la surface du triangle OAC et par suite la surface du quadrilatère OABC sera donc par la formule :

$$\text{Surf. OABC} = r^2 \text{ cotang. } 20°$$

Le secteur OABD sous-tend un arc de 140°, ce qui lui donne pour surface :

$\frac{\pi R^2 . 140°}{360°}$; la surface demandée est donc en la désignant par S :

$$S = R^2 \text{ cotang } 20° - \frac{\pi R^2 \, 140°}{360°}, \text{ mais à cause}$$

de R = 1,

$$S = \text{cotang } 20° - \frac{\pi . 140°}{360°}$$

cotang 20° = 0,4389841 = 2,7474 par suite :

$$S = 2,7474 - \frac{3,1416 \times 7}{18} = 1^{m},953$$

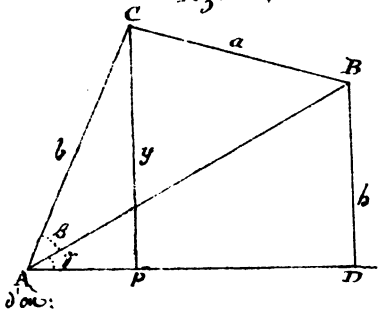
Telle est la valeur de l'aire cherchée.

Digitized by Google

Problème 407.

Le triangle ABC est rectangle en C. On connaît a, b et la perpendiculaire abaissée du point B sur AD; on demande de calculer y en fonction des angles β et γ. On suppose que: $b = 1^{m}$; $a = 0^{m}.879$ et enfin: $h = 0^{m}.573$

fig. 80.



Le Triangle ACP rectangle en P (voy. fig. 80) donne:

$$y = b \sin(\beta + \gamma)$$

le problème consiste donc à déterminer β et γ.

Dans le triangle ABC on a:

$$\tang \beta = \frac{a}{b}; \quad AB \sin\beta = a;$$

d'où:

$$AB = \frac{a}{\sin\beta}$$

Le triangle BAD nous donne:

$$AB \sin\gamma = b,$$

D'où on tire:

$$\sin\gamma \frac{b}{AB} = \frac{b \sin\beta}{a}$$

On aura donc:

Calcul de β

log. 0,879	= 1,9439889
Ct (− log. 1)	= 10.
log. tang. β	= $\bar{9}$.9439889

d'où: $\beta = 44° 18' 55'',7$

Calcul de γ

log. 0,573	= $\bar{1}$,7581546
log. sin. 44° 18' 55'',7	= $\bar{1}$.8196787
Ct (− log. 0,879)	= 0.6560111
log sin γ	= $\bar{1}$.3338444

d'où: $\gamma = 25° 29' 28'',3$

Digitized by Google

Calcul de y.

au moyen de la formule : $y = \sin(\beta + \gamma)$

$$\log. 1 = 0 \ldots\ldots\ldots$$
$$\log. \sin 66^\circ 28' 34'' = \bar{1},9634011$$
$$\log. y = \bar{1}\,9634011$$

d'où :

$$y = 0^m.919181$$

Ainsi la valeur de y en fonction des angles β et γ est égale à :

$$y = 0^m.919181.$$

Problème 408.

Une pièce de 12 légère étant pointée à 3°33, On propose de trouver la hauteur à laquelle la ligne s'élève à la distance de 1200m qui est à peu près la portée de celle sous l'angle 3° 33'.

On sait que la ligne de mire fait avec l'axe un angle de 1°7'15", ainsi la ligne de mire n'est inclinée à l'horizon que de :

3°33' − 1°7'55" = 2° 25'45" et la hauteur d'un de ses points à la distance horizontale de 1200m est le coté de l'angle droit d'un triangle rectangle. La hauteur cherchée est donnée par la relation :

$$H = 1200^m \text{ tang. } 2^\circ 25' 45''$$

Calcul de H

$$\log. 1200^m = 3,0791812$$
$$\log. \text{tang } 2^\circ 25' 45'' = \bar{2}\,5501222$$
$$\log. H = 1,6293034$$

d'où :

$$H = 42^m.590$$

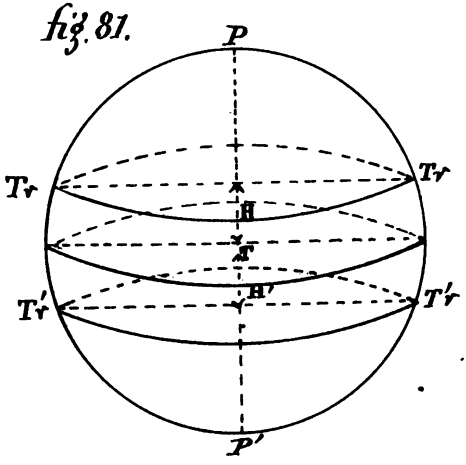
Digitized by Google

Problème 409.

On propose de calculer l'aire de la zone torride. Cette zone est bornée par les tropiques du Cancer et du Capricorne, les latitudes de ces deux cercles sont :

$$H' = +23^\circ 28' ; \quad H = -23^\circ 28'. \quad (1)$$

fig. 81.



L'aire d'une zone sphérique est égale à son épaisseur multipliée par la circonférence d'un grand cercle.

Soient donc : H et H' les latitudes des deux bases de la zone (Voy. fig. 81) — puis désignons R le rayon de la terre supposée sphérique. On aura :

$$h = R(\sin H' - \sin H) = 2R \sin\tfrac{1}{2}(H' - H) \cos\tfrac{1}{2}(H' + H)$$

la circonférence est donnée par la formule connue :

$$C = 2\pi R$$

par suite l'aire de la zone est :

$$A = 4\pi R^2 \sin\tfrac{1}{2}(H' - H) \cos\tfrac{1}{2}(H' + H)$$

Appliquons cette formule à l'évaluation de l'aire de la zone torride.

$$H' = +23^\circ 28' \qquad H' = +23^\circ 28'$$
$$H = -23^\circ 28' \qquad -H = +23^\circ 28'$$

$$H' + H = 0 \quad 0 \qquad H' - H = +46^\circ 56$$

d'où : $\frac{1}{2}(H' - H) = 23^\circ 28'$

(1) : Voy. Tissaud, Géodésie

L'expression de l'aire A écrite ci dessus deviendra alors :

$$A = 4\pi R^2 \sin 23°28' \cos \tfrac{1}{2}(H' + H)$$

étant égale à 1

Calcul de A

$$\log 4\pi R^2 = 14,7069684$$
$$\log \sin 23°28' = \bar{1},6001181$$
$$\log \cos \tfrac{1}{2}(H'+H) = 0 \ldots\ldots$$
$$\log A = 14,3070865$$

d'où :

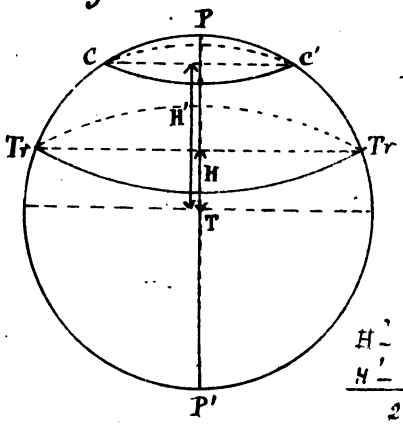
$$A = 20280867640 \text{ hectares}$$

Problème 410.

Trouver l'aire de la zone tempérée boréale qui est bordée par le cercle polaire arctique et le tropique du cancer, sachant que les latitudes des ces deux cercles sont :

$$H' = +66°32' ; \quad H = +23°28'$$

fig. 82



L'aire de la zone tempérée est donnée par la formule : (Voy. fig. 82)

$$A = 4\pi R^2 \sin \tfrac{1}{2}(H' - H) \cos \tfrac{1}{2}(H' + H)$$

Cherchons les valeurs de $\frac{1}{2}(H' - H)$ et $\frac{1}{2}(H' + H)$

On a évidemment d'après l'énoncé :

$$H = +66°32' \qquad H' = +66°32'$$
$$H = +23°28' \qquad H = +23°28'$$
$$H' - H = 43°4 \qquad H' + H = 90°80'$$
$$\frac{H' - H}{2} = 21°32' ; \quad \frac{H' + H}{2} = 45$$

Digitized by Google

L'aire de la zône tempérée sera donc égale à :

$$A = 4\pi R^2 \sin 21^\circ 32 \cos 45$$

Calcul de A

$$\log 4\pi R^2 = 14{,}069684$$
$$\log \sin 21^\circ 32' = 7\,5647163$$
$$\log \cos 45^\circ = \overline{7}\,8494850$$
$$\log A = 14{,}1211697$$

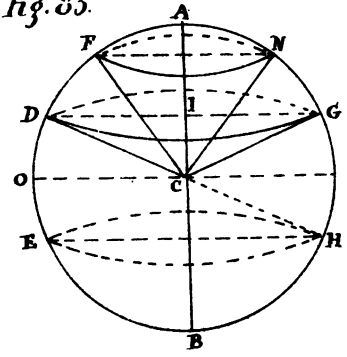
D'où :

$$A = 13218120440 \text{ hectares.}$$

Problème 411.

Trouver l'aire d'une zône sphérique : DFNG ?

fig. 85.



L'aire d'une zône sphérique est égale à la circonférence de grand cercle multipliée par la hauteur de la zône. On aura donc en appelant A cette aire : (Voy fig. 83)

$$A = \text{circonf } CD \times IK$$

Or, R étant le rayon CD (Voy. fig.) on a :

1° Circonf. $CD = 2\pi R$;

2° $CI = R \sin \alpha$; 3° $CK = R \sin \alpha'$; α et α' étant les latitudes des points D et F exprimées en degrés, savoir :

$$\alpha = OD \; ; \; \alpha' = OF \; ;$$

Donc :

$$IK = CK - CI = R(\sin \alpha' - \sin \alpha)$$

Donc l'aire cherchée est :

$$A = 4\pi R^2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha' - \alpha) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha' + \alpha)$$

On prend α' négatif quand le point F est situé

Digitized by Google

de l'autre côté de l'Equateur OC, c'est-à-dire quand l'équateur est compris entre les cercles des deux bases.

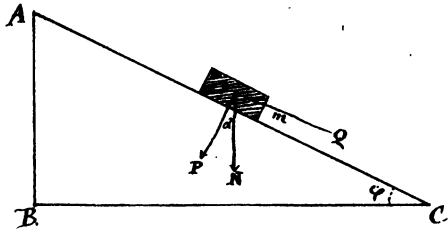
Problème 412.

Un mobile descend sur un plan incliné et parcourt une distance égale à 35m. La projection de ce chemin sur un plan horizontal est égale à 18m. Le coefficient de frottement est égal à 0.20. On demande le temps que mettra le mobile à parcourir la distance de 35m.

Si dans la formule : $e = \frac{1}{2} g t^2$ on remplace e par 35 et g par : $\frac{g \sin(\varphi - \alpha)}{\cos \alpha}$, φ est l'angle que le plan incliné fait avec l'horizon et tang. α = 0,20 ou le coefficient f de frottement. (1)

En effet, si nous décomposons le poids mg du corps en désignant par m sa masse en deux composantes : (voy. fig. 84) l'une, mg cos φ, perpendiculaire au plan incliné, et l'autre mg sin φ, qui agit parallèlement à ce plan ; mg. cos φ sera la pression exercée par le corps pendant son mouvement et par conséquent le frottement qu'il a éprouvé de la part du plan aura pour expression : f mg cos φ. Ce frottement agit en

fig. 84.



---

(1) Le coefficient de frottement de deux corps est égal au rapport du frottement à la pression qu'ils exercent mutuellement. L'angle dont la tangente est égal au coefficient de frottement se nomme angle de frottement (Voy. Ch. Delaunay Traité de Mécanique rationnelle)

Digitized by Google

sens contraire du mouvement, le corps se meut donc sous l'action d'une force égale à :

$$m g \sin\varphi - f m g \cos\varphi ;$$

par suite son accélération est :

$$g (\sin\varphi - f \cos\varphi)$$

En remplaçant f par $\tang \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

on obtient :

$$g\left(\sin\varphi - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\varphi\right) = g\left(\frac{\sin\cos\alpha - \sin\alpha\cos\varphi}{\cos\alpha}\right) = \frac{g\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha}$$

ce qui nous conduit à l'équation :

$$35 = \frac{1}{2} g \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha} t^2$$

d'où :

$$t = \sqrt{\frac{70 \cos\alpha}{g \sin(\varphi-\alpha)}}$$

Or :

$$\cos\varphi = \frac{18}{35}$$

Calcul de φ

$$\begin{aligned} \log. 18 &= 1,2552725 \\ \text{Ct}\,(-\log. 35) &= \bar{2},4559320 \\ \log. \cos\varphi &= \bar{1},7112045 \end{aligned}$$

d'où :

$$\varphi = 59^\circ\, 3'\, 1''$$

Mais :

$$\frac{\tang \alpha}{R} = 0,20$$

$$\begin{aligned} \log. 0,20 &= \bar{1}.3010300 \\ \log. R &= 10 \ldots\ldots \\ \log. \tang \alpha &= 9\ 3010300 \end{aligned}$$

d'où :

$$\alpha = 11^\circ 18' 35'',7$$

par suite : $\varphi - \alpha = 47^\circ 44' 25'',3$.

Digitized by Google

de l'autre côté de l'Equateur OC, c'est-à-dire quand l'équateur est compris entre les cercles des deux bases.

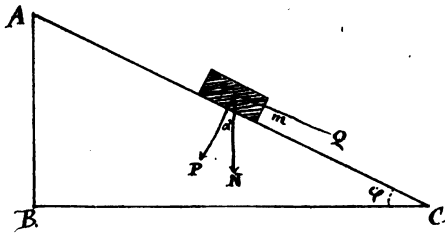
Problème 412.

Un mobile descend sur un plan incliné et parcourt une distance égale à 35m. La projection de ce chemin sur un plan horizontal est égale à 18m. Le coefficient de frottement est égal à 0.20. On demande le temps que mettra le mobile à parcourir la distance de 35m.

Si dans la formule : $e = \frac{1}{2} g t^2$ on remplace e par 35 et g par : $\frac{g \sin(\varphi - \alpha)}{\cos \alpha}$, φ est l'angle que le plan incliné fait avec l'horizon et $\tang \alpha = 0,20$ ou le coefficient f de frottement (1).

En effet, si nous décomposons le poids mg du corps en désignant par m sa masse en deux composantes : (voy. fig. 84) l'une, mg cos φ, perpendiculaire au plan incliné, et l'autre mg sin φ, qui agit parallèlement à ce plan ; mg. cos φ sera la pression exercée par le corps pendant son mouvement et par conséquent le frottement qu'il a éprouvé de la part du plan aura pour expression : f mg cos φ. Ce frottement agit en

Fig. 84.



---

(1) Le coefficient de frottement de deux corps est égal au rapport du frottement à la pression qu'ils exercent mutuellement. L'angle dont la tangente est égal au coefficient de frottement se nomme angle de frottement (Voy. Ch. Delaunay Traité de Mécanique rationnelle)

Digitized by Google

sens contraire du mouvement, le corps se meut donc sous l'action d'une force égale à :

$$m g \sin\varphi - f m g \cos\varphi ;$$

par suite son accélération est :

$$g(\sin\varphi - f\cos\varphi)$$

En remplaçant f par $\operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

on obtient :

$$g\left(\sin\varphi - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos\varphi\right) = g\left(\frac{\sin\varphi\cos\alpha - \sin\alpha\cos\varphi}{\cos\alpha}\right) = \frac{g\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha}$$

ce qui nous conduit à l'équation :

$$35 = \frac{1}{2} g \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\cos\alpha} t^2$$

D'où :

$$t = \sqrt{\frac{70 \cos\alpha}{g \sin(\varphi-\alpha)}}$$

Or :

$$\cos\varphi = \frac{18}{35}$$

Calcul de φ

$$\begin{aligned} \log. 18 &= 1,2552725 \\ \text{Ct}\,(-\log. 35) &= \bar{2},4559320 \\ \log. \cos\varphi &= \bar{1},7112045 \end{aligned}$$

d'où :

$$\varphi = 59^\circ\, 3'\, 1''$$

Mais :

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha}{R} = 0,20$$

$$\begin{aligned} \log. 0,20 &= \bar{1}.3010300 \\ \log. R &= 10\ldots\ldots \\ \log. \operatorname{tang}\alpha &= 9\ 3010300 \end{aligned}$$

d'où :

$$\alpha = 11^\circ 18' 35'',7$$

par suite : $\varphi - \alpha = 47^\circ 44' 25'',3$.

Digitized by Google

Calcul de t.

$-\log. 70$	=	$-1,8450980$
$\log. \cos 11° 18' 35'' 7$	=	$\bar{1},9914833$
$C^t (-\log. 9,8088$	=	$\bar{1},0083841$
$C^t (-\log. \sin 47° 44' 25'' 3$	=	$0,1307067$
$2 \log. t$	=	$0,0756721$
$\log. t$	=	$0,0378360$

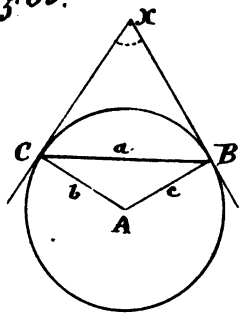
D'où :

$$t = 3'' 075$$

Problème 413.

Le rayon d'un cercle est égal à CA, une corde est égale à CB. Calculer l'angle des deux tangentes menées aux deux extrémités de cette corde.

fig. 85.



Dans le triangle ABC (voy fig. 85) on connaît les trois côtés AB, AC et BC que nous désignons par c, b, a.

Calculons l'angle A. Cet angle est donné par la relation :

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

Mais b et c sont égaux, donc :

$$\sin \frac{A}{2} = \frac{p-b}{b}$$

par suite :

$$\log. \sin \frac{A}{2} = \log. (p-b) - \log. b$$

Digitized by Google

Calcul de $\frac{A}{2}$

$$\log. p-b = 3,2563593$$
$$\text{et } (-\log. b) = \underline{4,5937234}$$
$$-\log \sin \frac{A}{2} = \overline{1},8500827$$
$$\text{d'où } \frac{A}{2} = 45°4'44'',28.$$

par suite

$$A = 90°9'28'',56$$

Mais dans le quadrilatère ABCX deux angles opposés sont droits, les deux autres sont donc supplémentaires et on obtient l'angle cherché en retranchant l'angle A de 180° ce qui donne :

$$X = 180° - 90°9'28'',56 = 89°50'31'',44$$

Digitized by Google

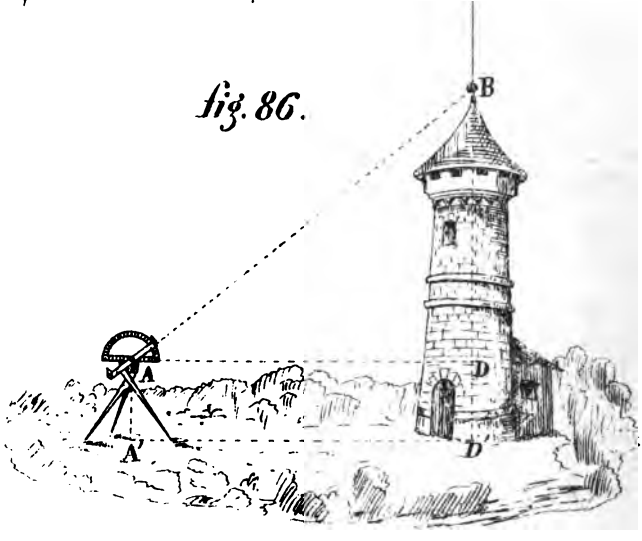
Application de la Trigonométrie rectiligne au levé des plans.

Nota : Nous ne décrirons pas ici les instruments dont on se sert habituellement pour le levé des plans, renvoyant le lecteur pour la description de l'équerre, de la boussole, du graphomètre etc aux ouvrages spéciaux

Problème 414.

Mesurer la hauteur d'un objet vertical dont le pied est accessible ?

fig. 86.



Digitized by Google

Et l'aide du graphomètre il suffira de mesurer l'angle (Voy. fig. 86) A formé par la ligne horizontale AD, et la ligne AB qui part du centre du graphomètre en aboutissant au sommet de l'édifice ou de l'objet dont on se propose de calculer la hauteur; on déterminera ensuite la longueur AD à l'aide de la chaîne. Pour avoir alors la hauteur de l'édifice, il n'y aura qu'à résoudre le triangle rectangle ABD dans lequel on connaît un côté AD et l'angle A. Si le terrain sur lequel on opère est horizontal à la hauteur trouvée BD, on ajoutera la hauteur de l'instrument AA' = DD'. Dans le cas où

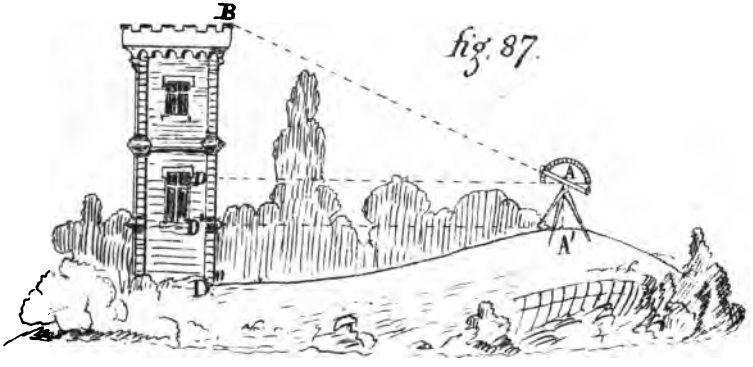


fig. 87.

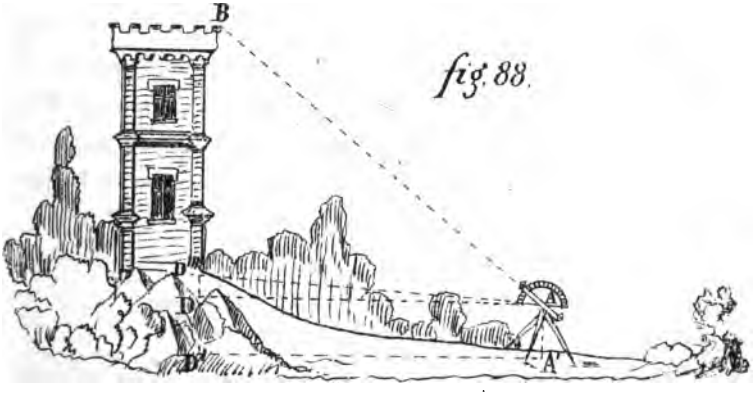


fig. 88.

Digitized by Google

le terrain n'est pas de niveau (Voy. fig 87) à la hauteur : BD + DD' = BD' il faudra ajouter : D'D'' différence de niveau entre le pied du lieu observé et le point d'observation, lorsque celui-ci sera plus élevé, si le point d'observation est moins élevé il faudra évidemment retrancher la quantité D'D''' (voy. fig 83). Nous allons maintenant appliquer ce que nous venons de dire à un exemple numérique :

Exemple : On a mesuré l'angle A et on a trouvé cet angle A = 50° 58' 8" la base AD = 36m. 873 Trouver la hauteur de l'édifice ?

Dans le triangle rectangle ADB, on voit que le côté BD sera donné par la formule connue :

$$BD = AD \text{ tang } A,$$

remplaçant A et AD par les valeurs données plus haut, il viendra : BD = 36m. 873 tg. 50° 58' 8" d'où en effectuant :

$$\log 36^{m}.873 = 1,5667035$$
$$\log.\text{tang}.\ 50°58'8'' = 0,0911487$$
$$\log.BD = 1,6807968$$

d'où enfin :

$$BD = 45^{m}.484.$$

Si la hauteur de l'instrument était AA' = 1m. 236 la hauteur de l'édifice observé serait BD' = 46m. 720. Si le point d'observation était plus élevé, la différence des niveaux était 0m, 68 la hauteur BD'' serait : 47m. 40 au dernier lieu, le point d'observation était moins élevé et la différence des niveaux était supposée toujours la même, la hauteur BD''' serait : 46m, etc.

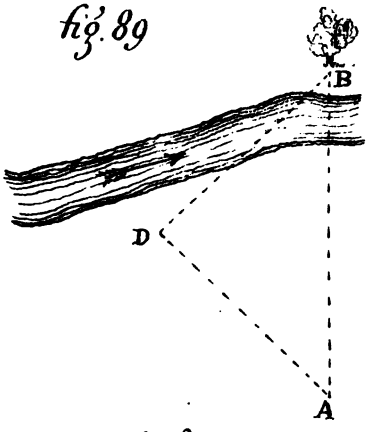
Problème 415.

Mesurer la distance qui sépare un point

Digitized by Google

accessible D d'un autre point B non accessible ?

fig. 89



Au point D où l'observateur est placé, traçons la droite DA (voy. fig. 89) mesurons cette longueur, menons par la pensée la ligne BD de manière que l'angle en D soit droit, puis plaçant un graphomètre en A évaluons cet angle. Dans le triangle rectangle ADB on connaît l'angle A et la longueur AD, on pourra calculer facilement la distance BD. Appliquons ce qui vient d'être dit à un exemple numérique :

Exemple : Si, comme dans la question précédente, on suppose la distance AD = 36m. 873 et A = 50° 58' 8" on aura :

$$BD = AD \text{ tang } A$$

Ou bien :

$$BD = 36^{m}.873 \text{ tang } 50^{\circ}.58'8''$$

D'où en effectuant :

$$\log 36^{m}.873 = 1,5667085$$
$$\log \text{tang } 50^{\circ}58'8'' = 0,0911487$$
$$\log BD = 1,6807968$$

D'où enfin :

$$BD = 45^{m}.484.$$

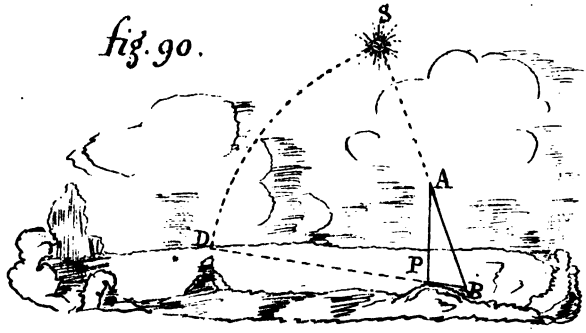
Problème 46.

Trouver la hauteur du soleil sur l'horizon.

Supposons que AP représente

un style vertical et PB son ombre dans un plan horizontal (voy fig. 90) si nous joignons le point B limite

fig. 90.



de l'ombre projetée par le style au point A extrémité du même style, nous formerons un triangle rectangle dans lequel on connaît les côtés AP et PB, il s'agit donc de déterminer l'angle B ou, si l'on aime mieux, l'angle D.S. Dans le triangle rectangle ABP on a :

$$AP = PB \text{ tang } B.$$

d'où on tire :

$$\text{tang } B = \frac{AP}{PB}$$

Substituons à AP la valeur, par exemple de 54m et à PB celle de 13m 50

On aura :

$$\text{tang } B = \frac{54^m}{13^m 50}$$

D'où en effectuant :

$$\begin{aligned} \log. 54 &= 1,7323938 \\ \log 13.50 &= \bar{2},8696662 \\ \log \text{tang} &= 0,6020600 \end{aligned}$$

d'où :

$$B = 75^\circ\ 57'\ 49'',5$$

Digitized by Google

Telle seroit la valeur de l'arc DS ou de la hauteur du soleil au dessous de l'horizon si la lumière qui nous vient du soleil nous arrivoit en ligne droite quoique passant par des milieux de densité différente; mais il n'en est pas ainsi et pour avoir la hauteur vraie d'un astre au dessus de l'horizon, il faut tenir compte de la refraction de la lumière qu'il nous envoie. La réfraction est comme on le sait le phénomène en vertu duquel les astres paraissent plus élevés qu'ils ne le sont réellement : dans l'exemple que nous avons donné, le faudroit retranscrire 0°15'63. La hauteur vraie donc :

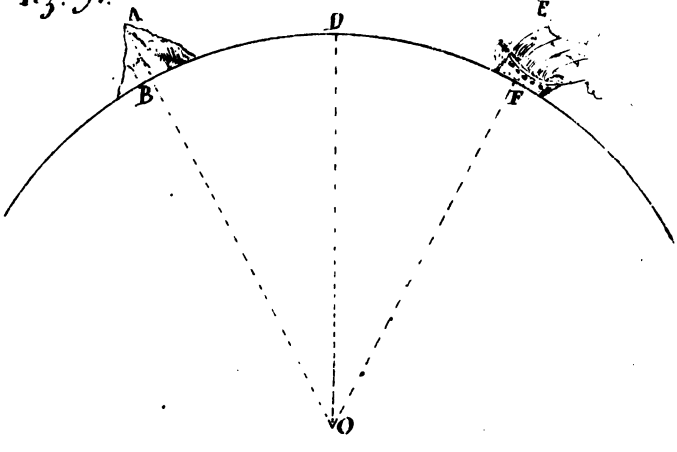
$$75^\circ\ 57'\ 49''5 - 6'15''63 = 75^\circ\ 57'\ 33''42$$

Problème 47.

Connaissant la hauteur d'un objet, déterminer la distance de laquelle on peut l'apercevoir.

Soit AB la hauteur de l'objet;

fig. 91.



Digitized by Google

la plus grande distance à laquelle on peut apercevoir le point A est l'arc BD déterminé par le rayon visuel AD tangent à un grand cercle de la sphère (voy. fig. 91). Au point de tangence D, tirons OD qui représentera le rayon terrestre, par exemple, (on suppose dans ce problème, la terre parfaitement sphérique), joignons ensuite le centre O au sommet A de l'objet dont on connaît la hauteur ou mesure enfin AD. Le triangle AOD ainsi formé dans le rectangle en D, on a :

$$\frac{OD}{OA} = \cos AOD = \cos(\text{arc } BD)$$

ou bien si nous désignons par : R le rayon terrestre et par H la hauteur AB, alors il viendra :

$$\cos BD = \frac{R}{R+H}$$

Alors la distance cherchée sera égale à :

$$BD + DF.$$

Comme exemple de ce que nous venons de dire, nous supposerons qu'un matelot placé à l'extrémité d'un mât de 14 m au dessus de la mer, aperçoive le sommet du pic de Ténériffe qui a environ 3612 m. On propose de déterminer la distance à laquelle le vaisseau se trouve de l'objet.

Nous ferons :

$$R = 6370548^{m}; \quad H = 3612^{m}$$

$H' = 14^{m}$. La première formule deviendra alors :

$$\cos BD = \frac{6370548}{6374160}$$

En effectuant :

$$\log. 6370548 = 6,8041768$$
$$\log. 6374160 = \bar{7},1955770$$
$$\log \cos BD = \bar{1},9997538$$

D'où :

$$BD = 1^{\circ}55'45''$$

Digitized by Google

Pour la seconde formule on aura :

$$\text{Cos}\,DF = \frac{6370548}{6370562}$$

d'où :

$$\begin{aligned} -\log.\ 6370548 &= 6,8041768 \\ \log\ 6370562 &= \overline{7},195822 \\ -\log.\ \text{Co}\,DF &= \overline{1},9999990 \end{aligned}$$

D'où :

$$DF = 0°7'55''$$

Distance cherchée $= 105°45'40'' - 0°7'55'' = 2°3'10''$

Il faut maintenant réduire 2° 3' 10'' en mètres ce qui donnera :

$$BDF = 230864^{m}$$

Problème 118.

Réduire un angle à l'horizon? Ce qui revient à ce problème : Connaissant ABE, BAE, angles que les deux droites AE, BE, situées dans un plan incliné, forment avec la ligne AB située dans un plan horizontal ABP. Connaissant en outre l'un des angles EBP, EAP formés par ces mêmes lignes et leurs projections horiz.les respectives, trouver l'angle APB formé par ces projections.

Dans le triangle BAE le côté AB est donné, ainsi que les angles ABE et BAE. On déterminera facilement les côtés AE, BE (Voy. fig. 92) au moyen des formules :

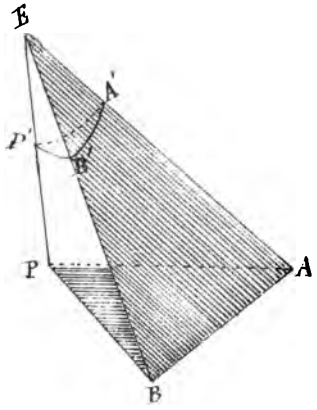
$$AE = \frac{AB\ \text{Sin.}\ ABE}{\text{Sin}\ AEB.}$$

$$BE = \frac{AB\ \text{Sin}\ BAE}{\text{Sin.}\ AEB.}$$

Digitized by Google

Dans l'un des deux triangles rectangles BPE, APE, on connaîtra l'hypoténuse et un angle aigu; on calculera les deux autres côtés, ce qui, dans l'autre triangle, déterminera l'hypoténuse ainsi qu'un côté, et donnera par conséquent le moyen de trouver l'autre côté, après avoir déterminé l'un des deux angles aigus. Cela fait, il n'y aura plus qu'à chercher l'angle P du triangle ABE; cette recherche n'offrira pas de difficulté puisque les trois côtés du triangle sont connus.

fig. 92



Donnons un exemple numérique

Si l'on avait par exemple : $AB = 368,73$; $\widehat{ABE} = 77° 6' 29''$; $\widehat{BAE} = 55° 55' 12''$; $\widehat{EAF} = 39° 1' 52''$, on aurait d'après les formules précédentes pour déterminer AE et BE

$$AE = \frac{AB \cdot \sin ABE}{\sin AEB} = \frac{368.73 \sin 77° 6' 29'',8}{\sin. 43° 58' 18'',9}$$

D'où en effectuant :

$$\begin{aligned} \log. 368,73 &= 2.5667085 \\ \log \sin 77° 6' 29'',8 &= 9,9889121 \\ \log \sin 43° 58' 18'',9 &= 9,1554493 \\ \log AE &= 2,7142699 \end{aligned}$$

D'où :

$$AE = 517^{m}.69;$$

On trouverait par un calcul de même genre :

$$BE = 454^{m}.84$$

Le triangle rectangle EAF donnerait :

$$AF = 402^{m}.15$$ et l'on pourrait se dispenser de calculer EF, son logarithme étant suffisant

Digitized by Google

Dans le triangle EBP on aura l'angle B égal à 45° 47' 15", BP = 37 m 7. Le triangle ABP se résout sans difficulté, et on obtient :

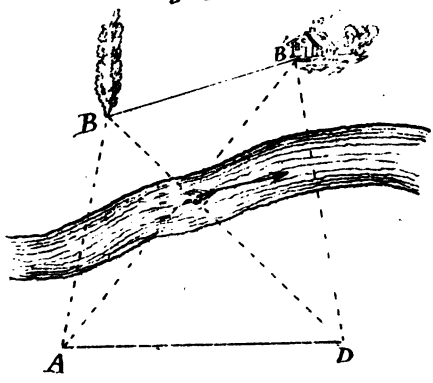
$\frac{P}{2} = 30°\ 9'\ 16''$ d'où l'on voit que l'angle AEB = 43° 58' 19", réduit à l'horizon, sera égal à = 60° 18' 31"

Problème 419

Mesurer la distance qui sépare deux points inaccessibles ?

Après avoir mesuré une base quelconque AD (voyez fig. 93) on placera un graphomètre en A et l'on mesurera les angles BAD, B'AD, puis on transportera le graphomètre en D et l'on déterminera les angles BDA B'DA. Dans les deux triangles ABD, ABD. ou bien encore les deux côtés BA, B'A on alors il n'y aura plus qu'à déterminer le côté BB' dans l'un des deux triangles BDB' ou BAB' dans lesquels on connaîtra un angle et les deux côtés qui le comprennent, et on pourra donc le résoudre facilement.

fig. 93.



Comme exemple numérique, nous supposerons qu'on ait mesuré une base AD = 454 m 84 et qu'on ait trouvé pour les angles :

Digitized by Google

$\widehat{BAD} = 77^\circ\ 6'\ 29''$ $\widehat{B'AD} = 50^\circ\ 58'\ 8''$, $\widehat{BDA} = 43^\circ 58' 19''$ et $\widehat{B'DA} = 69^\circ\ 22'\ 25''$.

Le côté AB est donné par la formule connue

$$AB = \frac{AD \sin BDA}{\sin ABD} = \frac{454{,}84 \sin 43^\circ 58' 18'',9}{\sin 58^\circ 55' 12'',3}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \log 454{,}84 &= 2{,}6578587 \\ \log \sin 43^\circ 58' 18'',9 &= 9{,}8415508 \\ \log \sin 58^\circ 55' 12'',3 &= 0{,}0672990 \\ \log AB &= 2{,}5667085 \end{aligned}$$

d'où :

$$AB = 368^{m},73$$

De même le côté BD nous sera donné par la formule :

$$BD = \frac{AD \sin BAD}{\sin ABD} = \frac{454{,}84 \sin 77^\circ 6' 28'',8}{\sin 58^\circ 55' 12'',3}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \log 454{,}84 &= 2{,}6578587 \\ \log \sin 77^\circ 6' 28'',8 &= 9{,}9889121 \\ \log \sin 58^\circ 55' 12'',3 &= 0{,}0672990 \\ \log BD &= 2{,}7140698 \end{aligned}$$

d'où

$$BD = 57^{m},69$$

Dans le triangle AB'D on aura le côté AB' au moyen de la formule :

$$AB' = \frac{AD \sin ADB'}{\sin AB'D} = \frac{454{,}84 \sin 69^\circ 22' 25''}{\sin 59^\circ 39' 26'',6}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \log 454{,}84 &= 2{,}6578587 \\ \log \sin 69^\circ 22' 25'' &= 9{,}9712283 \\ \log \sin 59^\circ 39' 26'',6 &= 0{,}0639791 \\ \log AB &= 2{,}6030661 \end{aligned}$$

d'où :

Digitized by Google

D'où :

$$AB' = 493^{m}.249$$

Le côté DB' du même triangle sera donné par l'expression :

$$DB' = \frac{AD \sin DAB'}{\sin AB'D} = \frac{454,84 \sin 50°58'8,''4}{\sin 59°39'26,''6}$$

D'où :

$$\log. 454.84 = 2,6578587$$
$$\log \sin 50°58'8,''4 = 9,8903122$$
$$\log \sin 59°39'26,''6 = 0,0639791$$
$$\log DB' = 2,6121500$$

D'où :

$$DB' = 409^{m}.402$$

Résolvons enfin l'un ou l'autre des deux triangles ABB', DBB' en employant les formules :

$$\text{Tang } \tfrac{1}{2}(A-B) = \text{tang } \tfrac{1}{2}(A+B)\frac{(a-b)}{(a+b)}, \quad d = \frac{AB \sin BAB'}{\sin AB'B}$$

Calcul du triangle ABB'

$$\log. \text{tang } \tfrac{1}{2}(\widehat{ABB} + \widehat{AB'B}) = \log \text{tang } (76°55'49,''8) = 10,6342384$$
$$\log (AB' - AB) = \log (124519) \ldots\ldots = 2,0952356$$
$$\log (AB' + AB) = \log (861979) \ldots\ldots = \bar{3},0645033$$
$$\log. \text{tang } \tfrac{1}{2}(\widehat{ABB'} - \widehat{AB'B}) = \log \text{tang } (31°53'33,''6) = 9,7639773$$

d'où on tire : $\widehat{ABB'} = 108°49'23,4$ .. $\widehat{AB'B} = 42°2'16,''2$

Calcul de d = BB''

$$\log AB = \log (368,73) \ldots\ldots\ldots = 2,5667085$$
$$\log \sin BAB' = \log \sin (26°8'20,''4) \ldots\ldots = 9,6439955$$
$$\log \sin ABB = \log \sin (45°2'16,''2) \ldots\ldots = 0,1502284$$
$$\log d = \log BB' = 2.3609324$$

d'où on tire : $BB' = d = 229^{m}.579$

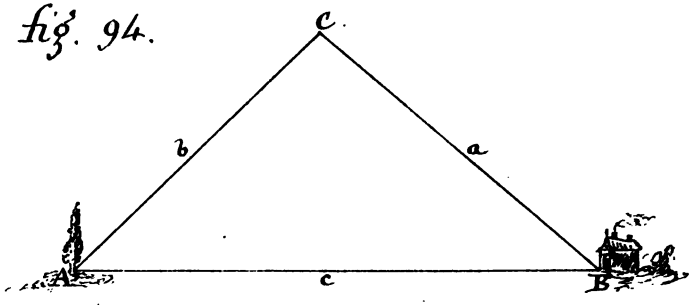
Digitized by Google

Problème 420.

Retrouver sur le terrain un point C dont on connaît les distances a et b à deux points connus A et B.

Si le triangle ABC formé par la base AB et les deux distances données, n'avait qu'une très-petite étendue on retrouverait évidemment le point C, en décrivant des points A et B comme centres des arcs de cercle qui auraient pour rayons a et b. Mais

fig. 94.



cette opération, comme on le comprend, est impraticable lorsque les quantités a et b sont très-grandes. Voici alors le procédé que l'on suit ordinairement pour déterminer le point C. On mesure d'abord la distance AB, (Voy. fig. 94) on connaît dès lors les trois côtés du triangle ABC et il est facile de calculer l'angle A par la formule connue :

$$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$$

Cet angle déterminant la direction du côté AC, il suffira de cheminer dans cette direction jusqu'à la distance AC = b.

Digitized by Google

Exemple : Supposons qu'on ait mesuré une base $AB = c = 8242^m 58$ et que les distances : $a = 9459^m 31$; $b = 8032^m 29$

On déduit de ces données : $2S = a + b + c = 25734^m,18$

$S = 12867^m 09$; $S - b = 4834^m 80$; $S - c = 4624^m 51$

Calcul de l'angle A

$$\log.(S-b) = \log 4834^m 80 = 3,6843785$$
$$\log.(S-c) = \log 4624^m 51 = 3,6650657$$
$$\log. b = \log 8032^m 29 = 4,0951606$$
$$\log. c = \log 8242^m 58 = \bar{4}.0839368$$
$$2 \log \sin\frac{A}{2} = \bar{1},5185416$$
$$\log \sin\frac{A}{2} = \bar{1},7592708$$

D'où on conclut :

$\frac{A}{2} = 35°31'47''$ et par suite : $A = 71°3'34''$

Problème 421.

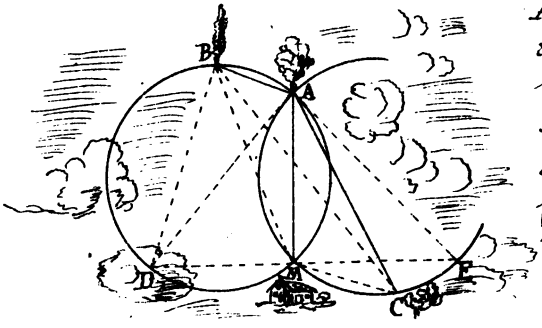
Trois points A, B, C sont donnés sur la carte d'un pays, on propose de déterminer la position d'un quatrième point M, d'où on aurait mesuré les angles AMB, AMC ; les quatre points A, B, C, M étant supposés dans le même plan.

Joignons le point A au point B et sur AB décrivons un segment AMDB (voy. fig. 95) capable de l'angle BMA, de même sur la droite qui joint le point A au point C décrivons un segment AMC capable de l'angle donné AMC, les deux arcs se couperont en AM, en ce dernier sera le point cherché. En effet, les points de l'arc AMDB sont les

Digitized by Google

seuls d'où l'on puisse voir la droite AB, sous un angle égal à AMB, de même aussi, les points de l'arc AMC sont les seuls d'où l'on puisse voir la droite AC sous un angle égal à AMC; donc le point M qui est l'intersection de ces deux arcs est aussi le seul d'où l'on puisse voir à la fois les droites AB et AC sous les angles AMB et AMC.

fig. 95.



Nous allons maintenant déterminer trigonométriquement la position du point M.

Exemple : Soient les données :

$$AB = 2500^m ; \; AC = 7.000^m ; \; BC = 9.000^m ;$$

$$\widehat{AMB} = 30°,80' ; \; AMC = 121° 40'$$

Dans le triangle ABC, on connaît les trois côtés, l'angle A sera donc déterminé par la formule connue :

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$$

dans laquelle $2S = 2500 + 7000 + 9000 = 18500$ et par suite

$$S = 9250^m$$

$b = 7000^m$; $c = 2500^m$ par suite : $S-b = 2250$, $S-c = 6750$.

La formule ci-dessus deviendra donc :

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{2250 . 6750}{2500 . 7000}}$$

En effectuant, il vient :

Digitized by Google

$$\log. 2250 = 3,3521825$$
$$\log. 6750 = 3,8293038$$
$$\log. 2500 = \bar{4},3020900$$
$$\log. 7000 = 4,1549020$$
$$\text{Log. Sin } \frac{A}{2} = \bar{1},9384483$$
$$\text{Sin } \frac{A}{2} = \bar{1},9192241$$

D'où :

$$\frac{A}{2} = 76^\circ 31',5$$

Enfin :

$$A = 152^\circ 63'$$

Tirons maintenant le diamètre AD en joignant DB ; dans le triangle BAD rectangle en B, on connaît le côté BA = 2500 et l'angle BDA qui est égal à l'angle BMA = 30°80 ; l'hypoténuse AD sera donnée par la formule :

$$AD = \frac{BA}{\text{Sin } BDA} = \frac{2500^m}{\text{Sin } 30^\circ 80'}$$

D'où on effectuera :

$$AD = 5374^m,6.$$

Menons de même le diamètre AF en joignant CE on aura un triangle rectangle ACE dans lequel on connaît le côté AC = 7000^m et l'angle adjacent CAE = AMC = 1500 = 21°40'

D'où l'on conclura :

$$AE = \frac{AC}{\cos CAE} = \frac{7000^m}{\cos 21^\circ 40'}$$

En effectuant on trouve :

$$AE = 7415^m$$

Enfin si l'on tire MD et ME, les deux angles AMD, AME étant droits, la ligne DME sera droite. Il ne nous reste donc plus qu'à résoudre le triangle DAE dans lequel la ligne AM dont nous avons fixé la grandeur et la position, est perpendiculaire, comme on le voit à DE. Dans le triangle DAE on connaît les

Digitized by Google

cotés : AD = 5374^{m} 6 ; AE = 7415^{m} et l'angle DAE entre ces cotés. L'angle DAE = BAC + CAE − DAB = 104° 33'

On conclut de là que l'angle ADE = 53° 93'. Le triangle rectangle ADM dont on a les éléments sera facilement résolu et donne AM = 4190. Cette quantité et l'angle BAM = 112° 27' déterminent entièrement la position du point cherché M.

Remarque : Lors de la création du nouveau système des poids et mesures, on voulut mettre la division de la circonférence en harmonie avec le système décimal et l'on partagea la circonférence en 400 grades, c'est à dire 100 ^{gr}. le quadrant. Il est regrettable que les calculateurs n'aient pas mis en usage cette nouvelle division de la circonférence qui abrège considérablement les calculs. Nous avons donné un exemple de la manière d'écrire dans la nouvelle division dans l'exemple que nous venons de présenter. Quand un angle est exprimé dans l'un des deux systèmes, il est facile d'avoir son expression dans l'autre système.

Problème 422.

Connaissant la latitude d'un lieu ainsi que la déclinaison du soleil, connaissant aussi la longueur d'un corps perpendiculaire à l'horizon, on propose de calculer la longueur de l'ombre méridienne de ce corps ?

Deux cas peuvent se présenter : ou la déclinaison du soleil est boréale, ou elle est australe.

Soit AP la hauteur du corps (Voy Fig 96.) perpendiculaire à l'horizon ; S la position du soleil lorsque la déclinaison est boréale, S' celle qu'il occupe lorsque sa déclinaison est australe, Z le zénith du point d'observation TS ou TS' la déclinaison boréale et australe du soleil. (La déclinaison d'un astre est, comme on le voit, la distance au plan de l'Equateur céleste)

On a alors :

l'arc SZ = TZ − TS qui exprime

Digitized by Google

la différence entre la latitude du lieu d'observation et la déclinaison du soleil, la déclinaison est boréale comme on peut le voir sur la figure ; 2° l'arc $S'Z = TS' + TZ$ qui exprime la somme de la latitude du lieu et la déclinaison du soleil, la déclinaison est dans ce second cas, australe.

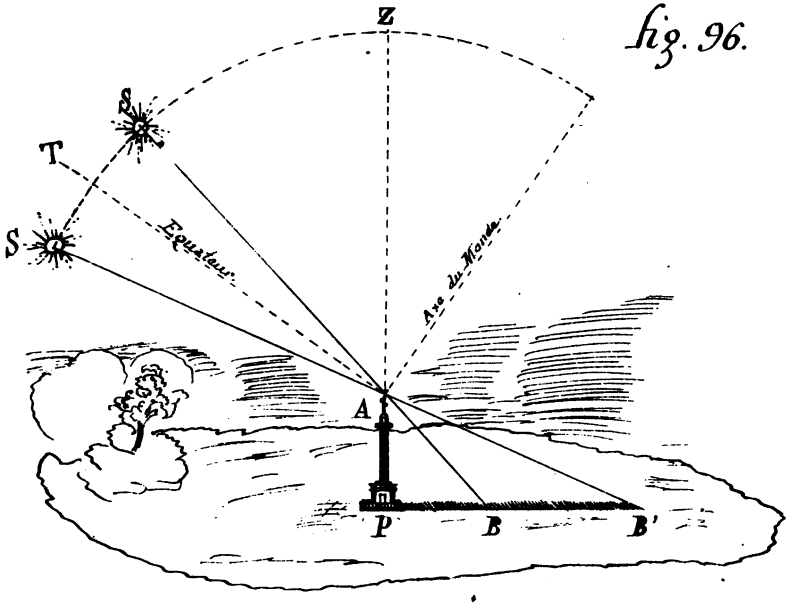


fig. 96.

Or, PB et PB' étant les deux ombres de AP, on aura : PB longueur de l'ombre méridienne lorsque la déclinaison du soleil est boréale, au moyen de la formule connue :

$PB = AP \operatorname{tang} PAB = \operatorname{tang} S'AZ = \operatorname{tang}(\text{arc } S'Z)$

Lorsque la déclinaison est australe l'ombre méridienne PB' est donnée par la formule analogue.

$PB' = AP \operatorname{tang} PAB' = \operatorname{tang} S'AZ = \operatorname{tang}(\text{arc}, S'Z)$

Appliquons tous ce que nous venons de dire à un exemple numérique.

Supposons qu'à Paris, situé sous 48°50'13

de latitude nord, un jour le soleil soit à 22° 57' 50" de déclinaison boréale, l'ombre méridienne de la colonne de la place Vendôme, par exemple, (en supposant cette colonne élevée de 43 mètres) sera 20m 854. En effet, la première des formules ci-dessus nous donne en remplaçant AP par 43m et tang (arc SZ) par 25° 52' 23"

$$PB = 43^m \cdot \text{tang. } 25° 52' 23''$$

Calcul de PB.

$$\log. 43^m = 1,6334685$$
$$\log. \text{tang } 25° 52' 23'' = \bar{1},6857354$$
$$\log. PB = 1,3192039$$

d'où :

$$PB = 20^m 855.$$

Problème 423.

Trouver la hauteur d'une tour dont le pied est inaccessible, mais dont la base est située sur un terrain horizontal.

Désignons par AS la hauteur de l'édifice dont le pied est inaccessible et dont on se propose de calculer la hauteur. En un point B situé à une certaine distance de la tour on placera un graphomètre et l'on mesurera l'angle SCD. Une fois cet angle mesuré, on transportera le graphomètre en un point B' (voy. fig. 97) situé sur le prolongement de la droite AB, et l'on mesurera l'angle SC'D, il ne restera plus qu'à mesurer à la chaîne la distance BB', qui est égale, comme on le voit, la distance des centres C et C' des deux positions du graphomètre. Dans

Digitized by Google

le triangle SCC' on a :

$$\frac{SC}{BB'} = \frac{\sin SC'D}{\sin(SC'D - SCD)} \text{ d'où on tire : } SC = \frac{BB' \sin C'D}{\sin(SC'D - SCD)}$$

Le Triangle SCD rectangle en D donne aussi :

$$SD = SC \sin SCD.$$

Donc :

$$SD = \frac{BB' \sin SCD \sin SC'D}{\sin(SC'D - SCD)}$$

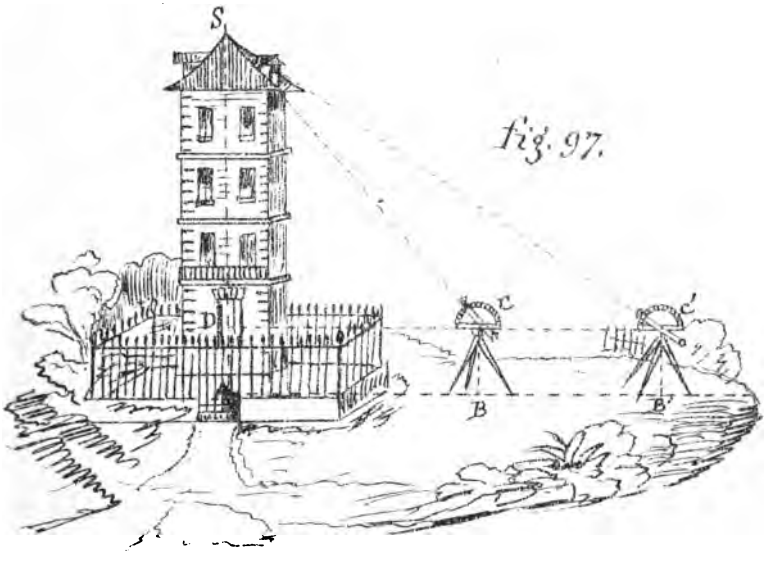


fig. 97.

Si à la hauteur trouvée SD on ajoute la hauteur du graphomètre (1m. 236) on aura la hauteur exacte de l'édifice.

Exemple numérique :

Soient les données.

$BB' = 23^m.35$, $\widehat{SCD} = 30°29'30''$ $\widehat{SCD} = 36°45'40''$

D'où :

$$\widehat{SCD} - \widehat{SCD} = 6°16'10''$$

Digitized by Google

La formule ci dessus qui donne SD, deviendra alors :

$$SD = \frac{23^{m}.35 \sin 30^{\circ} 29' 30'' \sin 36^{\circ} 45' 40''}{\sin 6^{\circ} 16' 10''}$$

à la hauteur CD il faudra ajouter celle de l'instrument BC = = 1m.236, on aura donc pour hauteur cherchée H = SD + BC.

Calcul de SD

log. 23m.25	=	1.3664320
log. Sin. 30°29'30"	=	$\bar{1}$,7053616
+ log. Sin. 36°45'40"	=	$\bar{1}$ 7770496
C+ log. Sin 6°16'10"	=	0,9617606
log SD	=	1,8105948

d'où : SD = 64m.655

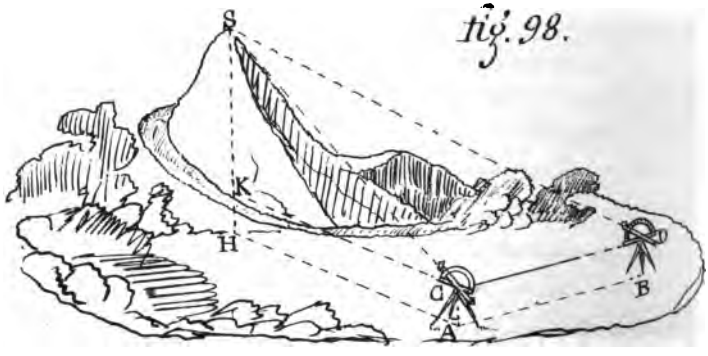
Par suite :

H = 64m.655 + 1m.236 = 65m.891

Problème 424.

Trouver la hauteur d'une montagne ?

fig. 98.



Digitized by Google

Soit SH la hauteur qu'il s'agit de mesurer. On prendra deux stations A et B de manière que A soit dans le plan horizontal du pied de la montagne dont on se propose de déterminer l'élévation, de manière aussi qu'on puisse mesurer sans difficulté à l'aide de la chaîne la distance AB. Les deux stations étant convenablement choisies, on placera le graphomètre (Voy. fig. 98) en A de manière que le centre du limbe de l'instrument se trouve exactement sur la verticale du point A et l'on plantera en B un signal. On mesurera l'angle SCD puis, sans déplacer le graphomètre, on évaluera l'angle SCK. Enfin on transportera l'instrument à la seconde station en B de manière que le centre du limbe se trouve encore sur la verticale du point B et l'on plantera le signal qui était en B en A puis l'on mesurera l'angle SDC.

La base AB ayant été mesurée à la chaîne, on connaîtra le côté CD et les angles du triangle SCD; le triangle SCD donne :

$$SC = \frac{CD \sin SDC}{\sin CSD}$$

Puis le triangle CSK, rectangle en K, donnera :

$$SK = SC \sin SCK$$

Donc :

$$SK = \frac{CD \sin SDC \sin SCK}{\sin CSD}.$$

La hauteur de la montagne sera complètement déterminée si à SK on ajoute la hauteur KS = AC ce qui donne :

hauteur de la Montagne = SK + AC.

Appliquons ce qui vient d'être dit à un exemple numérique en supposant les données

$\widehat{SCK} = 30° \; 30'$, $\widehat{SCD} = 85° \; 25'$, $\widehat{SDC} = 83° \; 50'$; d'où : $\widehat{CSD} = 10° \; 45'$, $CD = 55^m$.

Digitized by Google

Calcul de SK.

log. 50m	=	1,6989700
log Sin 83° 50'	=	$\bar{1}$,9974797
log Sin 30° 30'	=	$\bar{1}$ 7054689
ct. log. Sin. 16° 45'	=	0,7292652
log SK	=	2,1311838

d'où :

SK = 135m 26.

Par suite :

hauteur cherchée = 135m 26 + 1m 236 = 136m 496

Problème 405.

Trouver la distance d'un point donné à la droite qui passe par deux points inaccessibles.

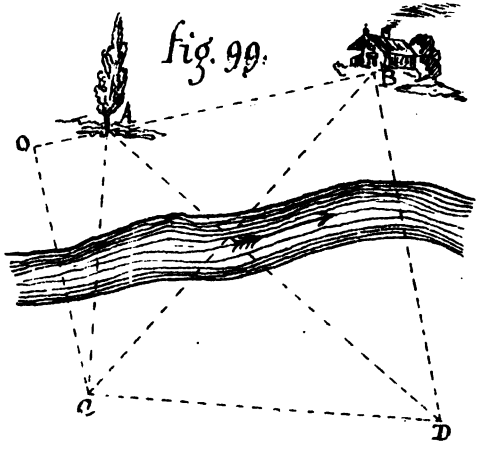


Fig. 99.

Du point donné C (voy. fig. 99) on mesurera à l'aide de la chaîne une base CD, puis, au moyen d'un bon graphomètre, on mesurera aussi les cinq angles BDC, ACD, ADC, BCD et enfin ACB. On déterminera les angles A et B du triangle ABC au moyen des formules

$$\tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2} \quad \text{ou} \quad \tan \frac{AB}{2} = \tan (45^\circ - \varphi) \cot \frac{C}{2}$$

Digitized by Google

En posant :

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{b}{a}$$

On aura ensuite la distance OC du point C à la droite AB, à l'aide de la formule :

$$OC = AC \sin A = b \sin A$$

Soient les données :

$CD = 60^m$; $BCD = 31°22'30''$; $ACD = 89°36'35''$

$ADC = 49°20'$; $BDC = 121°35'$; $ACB = 67°15'40''$

On déduit de là :

$CBD = 27°2'30''$; $CAD = 41°3'25''$; $180 - BDC = 58°25'$

$\frac{C}{2} = 33°37'50''$; $\frac{A+B}{2} = 56°22'10''$

Calculons l'angle φ. On a :

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{b}{a} - \log \text{tg}\,\varphi = \log b - \log a$$

où :

$$\log \text{tang} = \log \sin ADC + \log \sin CBD + \text{C}^t \log \sin CAD + \text{C}^t \log \sin BDC - 10$$

Calcul de l'angle φ

$$\begin{aligned}
\log \sin 49°20' &= \bar{1},8799634 \\
\log \sin 27°2'30'' &= \bar{1},6576661 \\
\text{C}^t(-\log \sin 41°3'25'') &= 0,1825490 \\
\text{C}^t(-\log \sin 58°25') &= 0,0396219 \\
\log \text{tang}\,\varphi &= \bar{1},7898004
\end{aligned}$$

d'où :

$$\varphi = 31°38'45''$$

par suite :

$$45° - \varphi = 13°21'15''$$

Calcul de $\frac{A-B}{2}$

$$\begin{aligned}
\log \text{tang}\, 13°21'15'' &= \bar{1},3754595 \\
\log \text{cot}\, 33°37'50'' &= 0,1770691 \\
\log \frac{A-B}{2} &= \bar{1},5525286
\end{aligned}$$

d'où : $\frac{A-B}{2} = 19°38'26'',75$

Digitized by Google

on a ci-dessous :

$$\frac{A+B}{2} = 56^\circ 22' 10''$$

On conclut de là :

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2} = 19^\circ 38' 26'',5 + 56^\circ 22' 10'' = 76^\circ 0' 36'',5$$

$$B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2} = 56^\circ 22' 10'' - 19^\circ 38' 26'',5 = 36^\circ 43' 43'',5$$

Maintenant que les angles A et B sont connus, il sera facile de calculer la distance OC par la formule que nous avons donnée ci-dessus.

Problème 426.

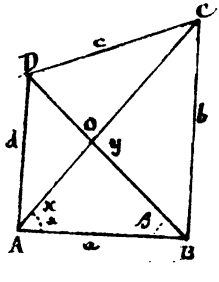
On donne dans le quadrilatère ABCD (voy. fig. 100)

$AB = a = 2724^m,67$; $A = 54^\circ 18' 13''$; $\alpha = 41^\circ 23' 48''$

$B = 33^\circ 15' 24''$; $\beta = 37^\circ 23' 55''$

On propose de calculer les côtés AD, DC et CB du quadrilatère ; les diagonales AC et BD ; les segments AO, BO, DO et CO ; les trois angles en D ; l'angle des diagonales et enfin la surface du quadrilatère.

fig. 100.



Nous calculerons d'abord l'angle ADB, on voit immédiatement qu'il est le supplément de la somme des angles A et B on aura donc :

$$A = 54^\circ 18' 13''$$
$$B = 37^\circ 23' 55''$$
$$91^\circ 42' 8''$$

Par suite : $ADB = 180^\circ - 91^\circ 42' 8'' = 88^\circ 17' 52''$

Le côté $AD = d$ du quadrilatère et la diagonale $BD = y$ seront donnés

Digitized by Google

par les formules :

$$d = \frac{a \sin \beta}{\sin ADB} \; ; \; y = \frac{a \sin A}{\sin ADB}$$

Calcul de d

log. 2724^{m},67	=	3,4353140
log Sin 37° 23' 55	=	$\bar{1}$,7834437
Ct (– log Sin 88° 17' 52")	=	0,0001917
log d	=	3,2189494

d'où :

$$d = 1655^{m}\,58$$

Calcul de y

log 2724^{m},67	=	3,4353140
log. Sin. 54° 18' 13"	=	$\bar{1}$,9096203
Ct (– log Sin 88° 17' 52")	=	0,0001917
log. y	=	3,3451260

d'où :

$$y = 2213^{m}\,74$$

En second lieu calculons ACB qui est le supplément de la somme des angles α et B on aura :

$$\alpha = 41° 23' 49"$$
$$B = 83° 15' 24"$$
$$124° 39' 12"$$

Par suite :

$$ACB = 180° - 124° 39' 12" = 55° 20' 48"$$

Le côté BC = b du quadrilatère et la diagonale AC = x seront donnés par les formules :

$$b = \frac{a \sin \alpha}{\sin ACB} \; ; \; x = \frac{a \sin B}{\sin ACB}$$

Digitized by Google

Calcul de b

$$\log. 2724^{m}, 67 = 3.4353140$$
$$\log. \sin. 41^{\circ} 23' 48'' = \bar{1}, 8203776$$
$$C^{t}. (-\log. \sin. 55^{\circ} 20' 48'') = 0, 0848074$$
$$\log. b = 3, 3404990$$

d'où :

$$b = 2190^{m}, 28$$

Calcul de x

$$\log. 2724^{m}, 67 = 3,4353140$$
$$\log. \sin 83^{\circ} 15' 24'' = \bar{1}, 9969852$$
$$C^{t} (-\log. \sin 55^{\circ} 20' 48'') = 0, 0848074$$
$$\log x = 3, 5171066$$

d'où :

$$x = 3289^{m}, 32$$

En troisième lieu nous calculerons $ADC = D$ et le côté $CD = c$, du quadrilatère, on aura :

$$A = 54^{\circ} 18' 13'' +$$
$$\alpha = 41^{\circ} 23' 48'' -$$
$$DAC = 180^{\circ} - 12^{\circ} 54' 25'' = 167^{\circ} 5' 35''$$
$$\frac{D + DCA}{2} = 83^{\circ} 32' 47'', 5$$

Pour déterminer les angles D et DCA il faut calculer maintenant $\frac{D - DCA}{2}$ par la formule connue :

$$\text{tang. } \frac{1}{2} (DCA) = \frac{x - d}{x + d} \text{ cotang } \frac{1}{2} DAC$$

$$x = 3289, 32$$
$$d = 1655, 58$$
$$x - d = 1633, 74$$
$$x + d = 4944, 90$$

Digitized by Google

Calcul de $\frac{1}{2}(D - DCA)$

$$\log. 1633,74 = 3,2131829$$
$$\log \cot. 6^\circ 27' 12'',5 = 0,9464872$$
$$\log. 4944,90 = \bar{4},3058425$$
$$\log. \tang \tfrac{1}{2}(D - DCA) = 0,4655126$$

d'où : $\frac{1}{2}(D - DCA) = 7^\circ 6' 2'',4$

$\frac{1}{2}(D + DCA) = 33^\circ 32' 47'',5$

Par suite en vertu d'un théorème connu, les angles D et DCA seront égaux à :

$$D = \frac{(D + DCA)}{2} + \frac{(D - DCA)}{2} = 154^\circ 38' 50$$

$$DCA = \frac{(D + DCA)}{2} - \frac{(D - DCA)}{2} = 12^\circ 26' 45''$$

Le coté DC = c du quadrilatère sera donné par la formule.

$$c = \frac{d \sin DAC}{\sin DCA}$$

Calcul de c

$$\log 1655,58 = 3.2189494$$
$$\log. \sin 12^\circ 54' 25'' = \bar{1},3490214$$
$$\text{Ct}^{\text{e}} (-\log. \sin 12^\circ 26' 45'') = 0,6665194$$
$$\log. c = 3,2344902$$

d'où : $c = 1715,89$

En quatrième lieu, nous calculerons les angles BCD = C, CD et le coté CD = c

On a :

$$B = 83^\circ 15' 24'' +$$
$$\beta = 37^\circ 23' 55'' -$$
$$DBC = 45^\circ 51' 29''$$
$$C + CDB = 180 - 45' 51'',29'' = 134^\circ 8' 31''$$
$$\frac{C + CDB}{2} = 67^\circ 4' 15'',5$$

Digitized by Google

Nous allons calculer comme précédemment $\frac{c - CDB}{2}$ par la formule connue :

$$\text{tang.}\ \frac{c - CDB}{2} = \frac{y-b}{y+b}\ \text{cot}\ \frac{1}{2}\ DBC$$

On aura d'abord pour les quantités $y-b$ et $y+b$ les valeurs suivantes :

$$y = 2213,74$$
$$b = 2190.28$$
$$y-b = 23.46$$
$$y+b = 4404,02$$

Calcul de $\frac{1}{2}(c - CDB)$

$$\begin{aligned}
\log.\ 23.46 &= 1.3703280 \\
\log\ \text{cotang.}\ 22°51'44''6 &= 0,3736456 \\
c^t(-\log\ 4404,02) &= \bar{4},3561507 \\
\log.\ \text{tg.}\ \tfrac{1}{2}(c - CDB) &= \bar{2},1001243 \\
\text{d'où}\ \tfrac{1}{2}(c - CDB) &= 0°43'17'',3 \\
\tfrac{1}{2}(c + CDB) &= 67°4'15'',5
\end{aligned}$$

par suite :

$$c = \frac{(c + CDB)}{2} + \frac{(c - CDB)}{2} = 67°47'33''$$

$$CDB = \frac{(c + CDB)}{2} - \frac{(c - CDB)}{2} = 66°20'58''$$

Le côté $CD = c$ se calculera par la formule :

$$c = \frac{b \sin DBC}{\sin CDB}$$

Calcul de c

$$\begin{aligned}
\log.\ 2190.28 &= 3,3404990 \\
\log.\ \sin.\ 45°51'29'' &= \bar{1},8557825 \\
c^t(-\log.\ \sin.\ 66°20'58'') &= 0,0331003 \\
\log c &= 3,2294818
\end{aligned}$$

d'où : $c = 1715,90$

Digitized by Google

Il nous faut calculer enfin l'angle AOB et les segments AO, CO, BO et DO.

On a :

$$\alpha = 41^\circ 23' 48'' +$$
$$\beta = 37^\circ 23' 55'' +$$
$$73^\circ 47' 43$$

Par suite :

$$AOB = 180^\circ - 78^\circ 47' 43'' = 101^\circ 12' 17''$$

Les segments AO et BO sont donnés par les formules :

$$AO = \frac{a \sin \beta}{\sin AOB} \quad ; \quad BO = \frac{a \sin \alpha}{\sin AOB}.$$

Calcul de AO

log. 2724 m, 67	=	3, 4353140
log. Sin 37° 23' 55''	=	$\bar{1}$, 7834437
c^t (− log. Sin 101° 12' 17'')	=	0, 0083580
Log. AO	=	3, 2271157

d'où : AO = 1687 m.

Calcul de BO

log. 2724	=	3, 4353140
log. Sin 41° 23' 48''	=	$\bar{1}$, 8203776
c^t (− log. Sin, 101° 12' 17'')	=	0, 0083580
log. BO	=	3, 2640496

d'où : BO = 1836 m 75

par suite :

$$CO = x - AO = 1602,32 \; ; \; DO = y - BO = 376,49.$$

Il nous reste à trouver l'aire du quadrilatère. En désignant par S la surface cherchée on aura évidemment :

$$S = \frac{1}{2} x . OB \sin AOB + \frac{1}{2} x \, DO \sin AOB$$

Ou bien :

$$S = \frac{1}{2} x \sin AOB (OB + DO)$$

Digitized by Google

On enfin :

$$S = \frac{1}{2}\, x\, y \,\sin AOB$$

puisque

$$OB + DO = y$$

Calcul de S.

- log. 3289, 32	=	3, 5171066
log. 2213, 74	=	3, 3451260
log. Sin 101° 12' 17"	=	1, 9916420
- log. 2 S	=	6, 8538746
d'où : 2 S	=	7142900 m.q

par outer

$$S = 3571450 \text{ m.q}$$

Fin.

Digitized by Google

PROBLÈMES

DE PHYSIQUE.

Digitized by Google

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Augustins, 55.

Digitized by Google

PROBLÈMES
DE PHYSIQUE

AVEC

LEURS SOLUTIONS DÉVELOPPÉES,

A L'USAGE

DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES
ET AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT,

PAR

A.-F. CHEVALLIER ET ACH. MÜNTZ.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1872

Digitized by Google

Digitized by Google

PRÉFACE.

Le Recueil de problèmes de Physique que nous offrons aujourd'hui au public des Écoles a été conçu dans un but essentiellement pratique. Il ne ressemble que par le titre aux ouvrages du même genre qui ont été publiés jusqu'à présent. En effet, tous ces ouvrages ne donnent, après l'énoncé du problème, qu'une solution trop succincte, sans faire voir aux élèves par quels raisonnements on y arrive.

Nous avons suivi une méthode tout opposée dont les avantages sont incontestables; nous avons attaché une grande importance au développement des problèmes et indiqué d'une manière claire et simple la marche à suivre pour arriver à leur solution. Que cherche, en effet, l'élève dans un livre de cette nature? Ce sont bien moins les données et les résultats des calculs que les détails de ces calculs mêmes; c'est un guide qui lui permette, par des exemples bien choisis, de résoudre toutes les questions de Physique élémentaire.

Le but que nous nous sommes proposé a donc été d'offrir aux candidats au baccalauréat ès sciences et aux Écoles du Gouvernement un Recueil complet des problèmes de Physique exigés pour leur admission et surtout de leur faire voir par quels raisonnements et par quelles transformations on peut les résoudre de la manière la plus simple.

De cette façon, quand ils auront suivi pas à pas les développements que nous indiquons, ils seront capables de traiter sans la moindre difficulté toutes les questions du même genre qui peuvent se présenter à eux. Nous croyons rendre un service

Digitized by Google

réel à nos lecteurs, en les initiant à tous les détails de la pratique de ces sortes de calculs. Notre Recueil est par là le complément obligé de tout Traité de Physique élémentaire.

Dans le choix des problèmes, nous nous sommes laissé guider par les mêmes idées d'utilité pratique; il a été fait avec beaucoup de soin ; nous avons cherché à éviter des répétitions qui eussent allongé le texte sans aucun profit, tout en n'omettant aucune opération instructive pour l'élève.

Notre Recueil étant plus spécialement destiné, comme nous l'avons dit, aux candidats au baccalauréat ès sciences et aux Écoles du Gouvernement, on y trouvera des exemples de toutes les questions qui peuvent être posées pour l'admission à ces examens.

Nous n'avons dépassé que rarement les limites que nous assignait la destination de cet ouvrage, et quand nous l'avons fait, c'était uniquement pour exposer certaines applications numériques d'un intérêt tout particulier.

Par exemple, on trouvera, à la fin des problèmes sur la pesanteur, une application de la formule de Laplace, pour calculer la hauteur des montagnes; nous y ajoutons les modifications que M. Babinet a fait subir à cette formule, lorsqu'il ne s'agit de calculer que les hauteurs inférieures à 1000 mètres.

Mais la partie la plus importante et réellement neuve de notre Livre consistant dans le développement des calculs, c'est sur elle que nous appelons toute l'attention. Nous nous sommes astreints à donner aux opérations la forme la plus simple et la plus claire, et à les rendre par là intelligibles à tous ceux qui possèdent les notions les plus élémentaires de Physique.

Nous savons que le besoin d'un Recueil conçu dans le but que nous venons d'exposer se fait sentir depuis longtemps, et nous aimons à croire que notre Livre sera accueilli favorablement par tous ceux dont on exige la pratique des calculs appliqués à la Physique.

A.-F. Chevallier, Ach. Müntz.

Digitized by Google

TABLE DES MATIÈRES.

PREMIÈRE PARTIE.

Problèmes relatifs à la pesanteur.

Intensité de la pesanteur..... 1
Principe d'Archimède appliqué aux liquides et aux gaz; poids spécifiques..... 16
Exercices sur le sphéromètre et la machine à diviser..... 57
Problèmes sur la pression atmosphérique et la force élastique des gaz..... 60
Mesure des hauteurs par le baromètre; formule de Laplace, formule de M. Babinet..... 85

DEUXIÈME PARTIE.

Problèmes sur la chaleur.

Dilatation des solides et des liquides, corrections barométriques. Thermométrie..... 89
Dilatation des gaz. Densités des gaz et des vapeurs..... 112
Chaleurs latentes de fusion..... 134
Chaleurs latentes de vaporisation..... 140
Chaleurs spécifiques des solides et des liquides..... 145
Mélange des gaz et des vapeurs. Tension de la vapeur d'eau. Hygrométrie..... 158

TROISIÈME PARTIE.

Problèmes sur l'acoustique et l'optique.

Problèmes divers..... 173

Digitized by Google

Digitized by Google

Problèmes de Physique.

Première Partie.

Problèmes relatifs à la Pesanteur.

Intensité de la Pesanteur

Problème 1.

Un aéronaute placé dans la nacelle d'un ballon, lance vers la terre un projectile auquel il imprime une vitesse initiale de 50 mètres par seconde. Au bout de combien de temps la vitesse de ce projectile aura-t-elle atteint 99 mètres et quel sera au bout de ce temps l'espace qu'il aura parcouru ? On négligera la résistance de l'air.

Pour trouver le temps qu'il faut au projectile pour acquérir une vitesse de 99 mètres, il faut appliquer

Digitized by Google

la formule :

$$V = V_0 + g t$$

dans laquelle V_0 est la vitesse initiale = 50 mèt., V, la vitesse finale = 99m, g l'accélération de la vitesse = 9m 8 et t le temps demandé.

On a donc :

$$99 = 50 + 9.8\,t$$

$$t = \frac{99-50}{9.8} = \frac{49}{9.8} = 5 \text{ secondes}.$$

Pour trouver l'espace parcouru, il faut appliquer la formule :

$$e = V_0 t + \frac{g t^2}{2}.$$

En mettant à la place des lettres les valeurs de ces dernières, on aura :

$$e = 50 \times 5 + \frac{9.8 \times 5^2}{2}$$

$$e = 250 + 49 \times 25 = 372^m 5.$$

Problème 2.

Un projectile a été lancé de bas en haut et s'élève jusqu'à une hauteur de 510m 22. On demande quelle a été sa vitesse initiale, en ne tenant pas compte de la résistance de l'air.

Cette vitesse sera la même que celle qu'aurait acquise le mobile en tombant d'une hauteur de 510m 22.

Pour exprimer cette vitesse, nous avons la formule :

$$v = \sqrt{2ge}$$

en remplaçant par les valeurs données on a :

$$v = \sqrt{2 \times 9.8 \times 510.22}$$

$$= \sqrt{10{,}000} = 100 \text{ mètres}.$$

Digitized by Google

Nombre qui représente la vitesse initiale qui devait avoir le mobile pour s'élever à la hauteur de 510m 22.

Problème 3.

Un projectile est lancé perpendiculairement de bas en haut avec une vitesse initiale de 100m. On demande combien de temps il emploie à revenir au point d'où il est parti? On négligera la résistance de l'air.

Pour obtenir le temps employé à monter nous avons la formule $v = V_0 - gt$; dans le cas actuel on a $V_0 = 100^m$; $v = 0$, puisque la vitesse est nulle quand le projectile est arrivé au plus haut de la course.

Nous aurons donc:

$$0 = 100^m - 9.8\,t$$

d'où:

$$9.8\,t = 100$$

$$t = \frac{100}{9.8} = 10^{\text{secondes}}\ 2$$

Le temps que le mobile mettra à tomber sera le même que celui qu'il aura mis à monter; en effet la formule $v = gt$ lui est applicable, seulement, dans ce cas, c'est v qui est égal à 100^m.

On a donc:

$$100 = gt$$

$$t = \frac{100}{9.8} = 10^{\text{sec.}}\ 2.$$

Le temps mis par le projectile à revenir au point de départ sera donc:

$$2 \times 10^{\text{sec.}}2 = 20^{\text{sec.}}/4.$$

Digitized by Google

Problème 4.

On lance un projectile de bas en haut en direction verticale avec une vitesse initiale de 100 mètres. Puis au bout d'un temps x on lance dans la même direction un second projectile avec la même vitesse de 100^{m}. Le second mobile se meut pendant 8^{sec}.7 avant de rencontrer le premier. On demande quelle est la durée du temps x qui sépare les époques des deux départs ? On négligera la résistance de l'air.

D'après le principe du mouvement retardé, le mobile reprend en redescendant à chaque point de sa trajectoire la vitesse qu'il y possédait en montant.

Au moment où les deux mobiles se rencontreront, leur vitesse initiale ayant été la même, leurs vitesses sont égales.

La vitesse du mobile qui monte sera donnée par la formule :

$$V = V_0 - g\,t$$

dans laquelle on a :

$$V_0 = 100^{m} \text{ et } t = 8^{sec}.7.$$

d'où :

$$V = 100 - 9.8 \times 8.7.$$

La vitesse du mobile descendant, au moment de la rencontre sera donnée par l'équation :

$V = g\,t'$ dans laquelle t' représente le temps employé par le mobile pour opérer sa descente jusqu'au point de sa rencontre.

Ce temps est égal à :

$$8^{sec}.7 + x - \frac{100}{9.8}$$

La vitesse du mobile descendant au moment de la rencontre sera donc

$$V = 9.8\left(8.7 + x + \frac{100}{9.8}\right)$$

Digitized by Google

d'où l'on peut tirer l'équation :

$$100 - 9.8 \times 8.7 = 9.8\left(8.7 + x - \frac{100}{9.8}\right)$$

puisque les deux vitesses des mobiles sont égales au moment de la rencontre.

D'où l'on tire : $x = \frac{200}{9.8} - 2 + 8\ 7 = 3$

L'intervalle de temps qui sépare les départs des deux mobiles est donc de : 3 secondes.

Problème 5.

Un mobile est à l'état de repos on le soumet à l'action d'un force accélératrice constante qui lui imprime un accroissement de vitesse de $5^m.75$ par seconde. On demande le temps qu'a duré le mouvement quand l'espace parcouru est de $1996^m,675$?

En désignant l'intensité de la force accélératrice par y, appelant T la durée du mouvement et E, l'espace parcouru, on a pour trouver l'une de ces deux quantités, les deux autres étant connues, la formule générale : $E = \frac{gT^2}{2}$

d'où on tire : $T^2 = \frac{2E}{2}$

ou bien : $T = \sqrt{\frac{2E}{g}}$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs on a :

$$T = \sqrt{\frac{2 \times 1996,675}{5.75}} = 25^s.$$

Problème 6.

On soumet un mobile, parti à l'état de repos, à l'action d'une force accélératrice constante qui lui imprime dans l'unité de temps un accroissement de vitesse de $5^m,75$. On demande quel est l'espace parcouru par ce mobile au bout de 15 secondes?

D'après la formule générale $E = \frac{gT^2}{2}$, on trouve en remplaçant les lettres par leur valeur :

$$E = \frac{5.75 \times (15)^2}{2}$$

En effectuant on trouve :

$$E = 646^m,875.$$

Digitized by Google

Problème 7.

Un mobile est soumis à l'action d'une force accélératrice dont l'intensité est 9^m 8088 par seconde. On demande quel est au bout de 20 minutes, l'accroissement de vitesse acquis par ce corps ?

Au bout de la première seconde l'accroissement de vitesse est 9^m, 8088, au bout de la 2e seconde, il sera : 2×9^m, 8088 et au bout de la 20e minute, il sera :

$$60 \times 20 \times 9^m, 8088 = 11770^m, 56.$$

Problème 8.

Un corps sous l'influence d'une force accélératrice constante, a parcouru en 8 secondes un espace de 313^m. 8816. On demande de calculer l'intensité de cette force accélératrice ?

La formule :

$$E = \frac{g T^2}{2} \text{ nous donne :}$$

$$g = \frac{2 E}{T^2} = \frac{2 \times 313,8816}{8 \times 8} = 9^m, 8088$$

Problème 9.

Un mobile animé d'un mouvement uniformément accéléré a parcouru 1000 mètres en 10 secondes. Quel sera l'espace parcouru pendant la 13e seconde, si le mouvement continue de la même manière ?

La formule :

$$E = \frac{g T^2}{2} \text{ nous donnera pour la force}$$

accélératrice dont ce mobile est animé :

$$g = \frac{2 \times 1000}{100} = 20 \text{ mètres}$$

Digitized by Google

L'espace cherché sera égal à la différence de l'espace parcouru pendant 18 secondes et celui parcouru à la fin de la 17e seconde.

En appelant x cet espace cherché, on aura :

$$x = \frac{g T^2}{2} = \frac{g T^2}{2}$$

$$x = \frac{20 \times (18)^2}{2} - \frac{20 \times (17^2)}{2} = 10 \left[(18)^2 - (17)^2\right]$$

d'où :

$$x = 350 \text{ mètres.}$$

Problème 10.

Un boulet de canon a été lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale de 250 mètres par seconde. Au bout de combien de temps sa vitesse sera-t-elle réduite à 53m 824, sous l'influence retardatrice de la pesanteur. On demande en outre quel sera l'espace parcouru par le boulet au bout de ce temps ? On admettra pour intensité de la pesanteur 9. 8088.

Soit T le nombre de secondes cherché. Au bout de chaque seconde l'action de la pesanteur diminuera la vitesse initiale de 9m 8088. Au bout du temps cherché cette vitesse sera diminuée de T × 9,8088 et sera alors

$$250 - T \times 9.8088$$

Or on a cette vitesse finale = 53m 824.

Donc :

$$250 - (T \times 9.8088) = 53,824.$$

d'où

$$T = \frac{250 - 53.824}{9.8088} = 20 \text{ secondes.}$$

En appelant E l'espace parcouru, on aura :

$$E = 250 \times 20 - \frac{9.8088 \times (20)^2}{2} = 3038^m 24$$

Digitized by Google

Problème 11.

Un corps a été soumis pendant 5 secondes à l'action d'une force accélératrice constante. Au bout de la 5e seconde, on fait cesser la force accélératrice. En conservant au mobile la vitesse acquise à ce moment il a parcouru ensuite, d'un mouvement uniforme, un espace de 450m en 18 secondes. On demande : 1° l'intensité de la force accélératrice,

2° l'espace parcouru pendant les cinq premières secondes ?

Le corps ayant parcouru d'un mouvement uniforme, 450m en 18 secondes, en une seconde il aura parcouru $\frac{450^m}{18} = 25^m$. Cette vitesse de 25m par seconde représente la vitesse acquise au bout de la 5e seconde, sous l'influence de la force accélératrice constante, l'accroissement de vitesse par seconde a été $\frac{25^m}{5} = 5^m$.

Cette dernière valeur correspond à g dans la formule :

$$E = \frac{gT^2}{2}$$

Pour trouver l'espace parcouru on a donc :

$$E = \frac{5 \times 5^2}{2} = 62^m.5.$$

Problème 12.

Un mobile animé d'une vitesse initiale inconnue est soumis à l'influence d'une force retardatrice constante qui agit en sens contraire de celui du mobile avec une intensité de 15m par seconde. On demande la vitesse initiale du mobile, sachant qu'il s'arrête au bout de 24 secondes ?

Soit V cette vitesse initiale. Cette vitesse avec

Digitized by Google

au bout des 24 secondes de 24×15^m. Comme au bout de ce temps la vitesse est nulle, on aura :

$$v - 24 \times 15^m = 0.$$
$$v = 24 \times 15^m = 360^m.$$

Problème 13.

La vitesse initiale d'un mobile a été de 600^m par seconde. Sous l'influence d'une force retardatrice constante, agissant en sens contraire du mouvement du mobile, ce dernier s'est arrêté au bout de 26 secondes. On demande de calculer l'intensité de cette force retardatrice ?

Cette intensité est égale à la perte de vitesse que le mobile éprouve à la fin de chaque seconde. En la représentant par x cette perte, sera au bout de 26 secondes de $26\,x$.

A ce moment la vitesse initiale est nulle, on aura donc :

$$600 - 26\,x = 0.$$

d'où :

$$x = \frac{600}{26} = 23^m.076 \text{ par seconde.}$$

Problème 14.

On demande la vitesse initiale dont un mobile est animé, sachant que ce mobile soumis à l'action d'une force retardatrice constante qui agit en sens contraire à son mouvement s'est arrêté après avoir parcouru 1600 mètres en 4 secondes. On demande en outre quelle est l'intensité de la force retardatrice ?

Si le mobile n'était soumis qu'à l'action de la

Digitized by Google

force retardatrice pendant l'espace de 4 secondes, il aurait parcouru le même espace, mais en sens inverse. Nous aurons donc en appelant x l'intensité de la force cherchée :

$$1600 = \frac{x \times 4^2}{2}$$ d'après la formule générale :

$$E = \frac{g\,T^2}{2}$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{2 \times 1600}{16} = 200^m \text{ par seconde.}$$

Cherchons maintenant la vitesse initiale. La force retardatrice égale à 200^m par seconde, diminue cette vitesse de 200^m par seconde. Puisque au bout de 4 secondes, elle est devenue nulle, elle était égale à :

$$4 \times 200 = 800^m \text{ par seconde.}$$

Problème 15.

Un boulet de canon est lancé verticalement de bas en haut avec une vitesse initiale de $490^m,44$ par seconde. On demande 1° à quelle hauteur il s'élève ;

2° Combien de temps qu'il lui faut pour s'élever à cette hauteur. L'intensité de la pesanteur est $9^m,8088$.

La vitesse initiale sera diminuée chaque seconde de $9^m,8088$. Le temps au bout duquel s'arrêtera le mobile sera donc exprimé par :

$$\frac{490,44}{9,8088} = 50 \text{ secondes.}$$

Quant à l'espace parcouru par le boulet pendant ce temps il nous est donné par la formule :

$$E = \frac{g\,T^2}{2}$$

et dans le cas actuel :

$$E = \frac{9,8088 \times (50)^2}{2} = 12261 \text{ mètres.}$$

Digitized by Google

Problème 16.

Un corps tombe d'une hauteur de 240m. 3156. On demande 1° le temps qu'il met à tomber;

2° quelle est sa vitesse au bout de ce temps (On négligera la résistance de l'air).

En remplaçant dans la formule $E = \frac{gT^2}{2}$ les lettres par leur valeur dans l'exemple donné, nous aurons:

$$240^m,3156 = \frac{9^m,8088\ T^2}{2}$$

En

$$T^2 = \frac{2 \times 240,3156}{9,8088}$$

d'où:

$$T = \sqrt{\frac{2 \times 240,3156}{9,8088}} = 7 \text{ secondes.}$$

Quant à la vitesse finale puisque la vitesse du corps augmente de 9,8088 par seconde, elle sera $9,8088 \times 7 = 68^m,6616$ par seconde.

Problème 17.

On demande le temps qu'un corps mettrait à tomber d'une hauteur de 2000 mètres, en négligeant la résistance de l'air?

D'après la formule:

$$E = \frac{gT^2}{2} \text{ on aura:}$$

$$2000 = \frac{9,8088\ T^2}{2}$$

d'où:

$$T^2 = \frac{2 \times 2000}{9,8088}$$

et:

$$T = \sqrt{\frac{2 \times 2000}{9,8088}} = 20^{\text{sec}},2$$

Digitized by Google

Problème 18.

Un corps, soustrait au frottement de l'air, tombe d'une hauteur de 4000 mètres. On demande quelle est la vitesse acquise quand il aura parcouru cet espace ?

D'après la formule $E = \frac{gT^2}{2}$, on a :

$$T = \sqrt{\frac{2E}{g}}$$

D'un autre côté, dans la formule de la vitesse :

$$V = gT, \text{ on a } T = \frac{v}{g}.$$

En égalant ces deux valeurs de T, on a :

$$\frac{v}{g} = \sqrt{\frac{2E}{g}} \text{ et } v = \sqrt{2gE}$$

On a donc dans le cas présent :

$$v = \sqrt{2 \times 9,8088 \times 4000} = 280^m,12.$$

Problème 19.

Pour mesurer la profondeur d'un puits, on y fait tomber une pierre. Cette pierre met 8 secondes $\frac{1}{2}$ pour tomber au fond. On demande la profondeur ?

D'après la formule $E = \frac{gT^2}{2}$ on aura pour trouver cette profondeur E

$$E = \frac{9,8088 \times (8,5)^2}{2} = 354^m,343.$$

Problème 20.

On lance une pierre verticalement de haut en bas, d'une hauteur de $149^m,777$, en lui imprimant une

Digitized by Google

vitesse de 10 m par seconde. Combien de temps la pierre mettra-t-elle à tomber ?

L'espace qu'elle parcourra sera égal à la somme de l'espace qui lui fait parcourir la vitesse d'impulsion initiale et qui est égal à 10 T et de l'espace qu'elle parcourra sous l'influence de la pesanteur et qui est exprimé par :

$$\frac{9^m\ 8088\ T^2}{2}$$

On aura donc :

$$149.77 = 10\ T + \frac{9^m\ 8088\ T^2}{2}$$

En résolvant par rapport à T cette équation du second degré et prenant la valeur positive qu'elle donne, on trouve :

$$T = 4^{\text{secondes}}\ 6.$$

Problème 21.

On demande la durée de l'oscillation d'une pendule simple d'une longueur de $0^m.99384$, dans un endroit où l'intensité de la pesanteur est 9, 8088.

On a la formule générale :

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

dans laquelle t exprime la durée de l'oscillation, l la longueur du pendule et g l'intensité de la pesanteur.

Dans le cas actuel, on a donc

$$t = 3,1416 \sqrt{\frac{0,99384}{9,8808}} = 1 \text{ seconde.}$$

Problème 22.

On demande quelle est l'intensité de la pesanteur dans un endroit où le pendule qui bat la seconde a une longueur de $0^m.991$?

Digitized by Google

La formule générale $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ devient $t = \pi \sqrt{\frac{l'}{g'}}$; t restant le même, mais l et g variant en même temps, les longueurs et les intensités l, g et l', g' seront liées par la relation :

$$\frac{l'}{g'} = \frac{l}{g}$$

d'où

$$g' = \frac{g.l'}{l}$$

En mettant dans cette dernière équation, leurs valeurs à la place de g, l, l', nous aurons :

$$g' = \frac{9,8088 \times 0^m,991}{0,99384} = 9^m,708$$

Problème 23.

On demande quelle est, dans un lieu où l'intensité de la pesanteur est 9,8088, la longueur d'un pendule, pour qu'il mette 5 secondes à faire une oscillation ?

Dans le cas actuel, g restant le même dans la formule $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ et t variant, il faut que l varie en même temps. Nous aurons donc :

$$t' = \pi \sqrt{\frac{l'}{g}}$$

La durée des oscillations et la longueur des pendules sont liées par la relation :

$$\frac{t}{t'} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{l'}}$$

d'où l'on tire :

$$l' = \frac{t'^2 . l}{t^2}$$

En remplaçant dans cette formule les lettres par leurs valeurs, on aura :

$$l' = 5^2 \times 0^m,99384$$
$$= 25 \times 0^m,99384 = 24^m,846.$$

Digitized by Google

Problème 24.

On demande quel devrait être le rapport entre la vitesse de rotation réelle de la terre et la vitesse qu'elle aurait si la force centrifuge y annulait la gravité. On sait qu'à l'équateur la force centrifuge est $\frac{1}{289}$ de la gravité?

La force centrifuge varie comme le carré de la vitesse. En appelant donc v la vitesse réelle et v' la vitesse cherchée, on aura la relation :

$$\frac{v^2}{v'^2} = \frac{g\,\frac{1}{289}}{g} = \frac{1}{289}$$

d'où

$$v'^2 = v^2 \times 289$$

et

$$v' = v\sqrt{289} = 17.v.$$

La vitesse de rotation de la terre doit être 17 fois plus grande qu'elle n'est réellement pour qu'à l'équateur la force centrifuge annule complètement l'action de la pesanteur.

Problème 25.

On fait osciller un pendule d'une longueur de $1^m.95$; ce pendule fait 61,682 oscillations en un jour moyen. On demande de calculer la longueur du pendule qui bat la seconde ?

Un jour moyen se composant de 86.400 secondes, le pendule à seconde fait dans cet espace de temps 86 400 oscillations.

On a la formule :

$$\frac{l}{l'} = \frac{n'^2}{n^2}$$ dans laquelle l et l' représentent

Digitized by Google

les longueurs et n, n' les nombres d'oscillations...

Remplaçant dans cette formule les lettres par leurs valeurs, nous aurons :

$$L = 1,95 \left(\frac{61\,682}{86\,400}\right) = 0^{m},\ 993855.$$

Principe d'Archimède appliqué aux Liquides et aux Gaz et poids spécifiques.

Problème 26.

Un corps pèse dans l'air 64 grammes et, dans l'eau 58 grammes. Quelle est sa densité ?

La différence entre le poids dans l'air et le poids dans l'eau, qui est de 6 gr. représente le poids d'un volume d'eau égal au volume du corps. Comme à volumes égaux, les densités des corps sont proportionnelles à leur poids, nous aurons, en prenant pour unité la densité de l'eau et appelant x la densité cherchée :

$$\frac{x}{1} = \frac{64}{6}$$

d'où :

$$x = \frac{64}{6} = 10,666$$

Problème 27.

Un corps pèse 25 gr. dans l'air, un flacon rempli d'eau pèse 220 gr; on y introduit le corps qui

Digitized by Google

fait sortir une certaine quantité d'eau, ce flacon pèse alors 235 gr. On demande la densité du corps?

La somme du poids du corps dans l'air et du poids du flacon plein est 245 gr. La différence entre ce dernier poids et celui du flacon contenant le corps est de 245 gr - 235 gr = 10 gr. Ce poids est celui de l'eau expulsée dont le volume est égal au volume du corps.

On aura donc : $\frac{x}{1} = \frac{25}{10}$; $x = 2.50$.

Problème 28

On plonge dans l'eau à 4° un corps qui y éprouve une perte de poids de 60 grammes. On demande le volume du corps ?

1 gr. d'eau occupant à 4° un volume de 1 cc. D'après le principe d'Archimède le poids perdu par un corps plongé dans un fluide est égal au poids du fluide déplacé. Le corps aura donc déplacé 60 cc. d'eau, volume qui est évidemment égal au sien.

Problème 29.

Un corps a été pesé au moyen de la balance hydrostatique. Son poids dans l'air est de 60 gr. Suspendu sous le plateau et plongé dans l'eau, il ne pèse plus que 47 grammes. On demande sa densité ?

Le corps ayant perdu dans l'eau 60-47 = 13 gr., son volume est de 13 cc. Son poids étant de 60 gr. on a, d'après la formule :

$$D = \frac{P}{V}, \quad D = \frac{60}{13} = 4,6154.$$

Un flacon bouché à l'émeri pèse 40 gr. vide, plein d'eau, il pèse 360 gr. ; plein d'un autre liquide, il pèse 322 gr. ; quelle est la densité de cet autre liquide ?

Comme, à volumes égaux, les densités des

Digitized by Google

corps sont proportionnelles à leur poids, On aura dans le cas actuel, la Densité de l'eau étant prise pour unité :

$$D = \frac{322 - 40}{360 - 40} = \frac{282}{320} = 0,881 .$$

Problème 30

Quel est le volume d'un corps qui pèse 680 gr. dans l'air et 535 gr. dans l'eau à la température du maximum de densité ?

Le poids de l'eau déplacée, c'est à dire 680 – 535 = = 145 gr représente un volume de 145 c.c. qui est égal au volume du corps.

Problème 31

Quel est le poids d'une sphère de plomb qui a 1m de rayon, sachant que le plomb a une densité de 11,35 ?

Le volume de cette sphère sera d'après la formule :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 , \frac{4}{3} . 3,1416 \times 1 = 4^{m.cub}.189$$

Un volume d'eau égal à celui de cette sphère pèserait 4189 Kil.

Le poids du plomb étant 11.35 fois plus fort que celui de l'eau, on aura pour poids de la sphère en plomb :

$$4189^K \times 11.35 = 47545^K.15$$

Problème 32

Un flacon plein d'eau à 4° pèse 160 gr; lorsque on place à côté de lui, sur le même plateau un morceau de plomb, la somme des deux poids fait 188 gr 25. On introduit le plomb dans le flacon et on l'essuie ; il pèse alors 185 gr. 761. On demande la Densité du plomb ?

Le poids du plomb est :

Digitized by Google

$$188^{gr}.25 - 160^{gr} = 28^{gr},25$$

Le poids du volume d'eau égal au volume du plomb est — :

$$188^{gr}.25 - 185^{gr},761 = 2^{gr},489.$$

Le poids spécifique du plomb s'obtiendra en divisant le poids par le volume.

On aura donc : $\frac{28.25}{2.489} = 11,35$

Problème 33

Un corps A pèse dans l'air 7gr.55, dans l'eau 5gr.17 et dans un autre liquide B 5gr,35. On demande la densité du corps A et celle du liquide B.?

La perte de poids que subit dans l'eau le corps A est $7^{gr}.55 - 5^{gr}.17 = 2^{gr}.38$ poids qui représente celui de l'eau déplacée et par suite exprime en centimètres cubes le volume du corps. Ce corps a dès lors une densité égale à :

$$\frac{7.55}{2.38} = 3,173$$

Pour avoir la densité du liquide B, cherchons le poids du liquide déplacé par le corps A. Ce poids sera égal à la perte de ce corps dans le liquide B, soit — :

$$7^{gr},55 - 5^{gr},35 = 2^{gr},20$$

Or le même volume d'eau pèse $2^{gr}.38$; nous aurons donc la densité du second liquide, celle de l'eau étant prise pour unité en divisant le poids du liquide par celui du même volume d'eau :

$$D = \frac{2,20}{2.38} = 0,924.$$

Problème 34.

Un aréomètre pèse-acide de Beaumé à tige cylindrique s'enfonce jusqu'à la 66e division dans l'acide sulfurique dont la densité est 1.8. Cela posé, On demande 1° Quelle est la densité de l'eau salée qui a servi à la graduation de l'instrument ;

Digitized by Google

2° Quel est le rapport du volume d'une division au volume de l'aréomètre jusqu'au zéro ?

1° Soient d'abord V le volume de l'aréomètre jusqu'au zéro de l'échelle, v le volume jusqu'à 66 et v' le volume jusqu'à 15. On a :

$$\frac{V}{v} = \frac{1.8}{1} \quad \text{ou} \quad \frac{v + 66}{v} = 1.8$$

d'où

$$v = 82,5 \text{ et } V = 148,5.$$

De l'égalité $V - v' = 15$, on tire $v' = 133.5$.

La densité de l'eau salée est donc donnée par l'égalité : $\frac{V}{v'} = \frac{d}{1}$; $d = \frac{148,5}{133,5} = 1,112$

2° Le rapport du volume d'une division au volume de l'aréomètre jusqu'au zéro est $\frac{1}{148,5}$.

Problème 35.

Un aréomètre de Fahrenheit pèse 100 gr. Pour le faire plonger dans l'eau jusqu'au point d'affleurement il faut 30 gr. Il ne faut plus que 12 gr. pour le faire affleurer dans un autre liquide. Quelle est la densité de ce liquide ?

100 gr. + 30 gr. représentera le poids de l'eau déplacée par l'Aréomètre.

100 gr. + 12 gr. sera le poids du liquide déplacé par le même instrument.

Comme les volumes déplacés sont égaux et qu'à volumes égaux les densités de deux corps sont proportionnelles à leurs poids, la densité du liquide, celle de l'eau étant 1 sera :

$$d = \frac{112}{130} = 0,861.$$

Problème 36.

Pour faire plonger un aréomètre de Nicholson

Digitized by Google

dans l'eau distillée, jusqu'au point d'affleurement, il faut ajouter sur le plateau 75 gr. On met sur le plateau un corps dont on veut chercher la densité; il ne faut plus que 52 gr. pour faire affleurer l'instrument. Lorsque le corps est placé dans le plateau inférieur, de manière à plonger dans l'eau, il faut 62 gr. pour déterminer l'affleurement. On demande la densité du corps ?

Le corps pèse 75 gr. − 52 gr. = 23 gr. Plongé dans l'eau, il perd 62 gr. − 52 gr. = 10 gr., poids qui est égal au poids de l'eau déplacée. Le volume du corps est donc représenté par 10 c.c. et, son poids étant 23 gr. On aura, pour expression de sa densité :

$$\frac{23}{10} = 2,3.$$

Problème 37

Un aréomètre de Fahrenheit pèse 80 gr. Lorsqu'il est chargé de 45 gr. il affleure dans un liquide dont la température est de 20° et dont la densité à la même température est 1,5. On demande le volume à 0° de la portion immergée de l'instrument ?

Le poids du liquide déplacé est 80 gr. + 45 gr. = 125 gr. et son volume à 20° est d'après la formule :

$$P = VD, V = \frac{P}{D} = \frac{125}{1,5}$$

Le volume à 0° sera donc, (0.00002584 étant le coefficient de dilatation cubique du verre qui forme l'instrument) :

$$V_0 = \frac{125}{1,5} \times \frac{1}{1 + 0,00002584 \times 20} = 83^{c.c}.29$$

Problème 38.

Il faut 60 gr. pour faire affleurer un aréomètre de Nicholson dans l'eau distillée. En mettant sur le plateau supérieur un corps dont on veut mesurer la densité,

Digitized by Google

il ne faut plus ajouter que 33 gr. pour déterminer l'affleurement. Enfin, en mettant le corps dans le plateau inférieur, il faut 42 gr. sur le plateau supérieur. Quelle est la densité de ce corps ?

Le poids du corps est : $60^{gr} - 38^{gr} = 22^{gr}$

Le poids du volume d'eau qu'il déplace est :

$$42^{gr} - 38^{gr} = 4^{gr}$$

En prenant donc la densité de l'eau pour unité, on a pour la densité cherchée :

$$x = \frac{22}{4} = 5,50$$

Problème 39.

Une boule de verre pèse 2 K. Quelle est la surface intérieure de la boule, la densité du verre étant 2,38 ?

Le volume de la boule sera : $\frac{4}{3}\pi R^3$. On aura donc :

$$2\,K = \frac{4}{3}\pi R^3 \times 2,38$$

On a $S = 4\pi R^2$ pour expression de la surface cherchée. En divisant ces deux équations membre à membre il vient :

$$\frac{2}{S} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \times 2,38}{4\pi R^2} = \frac{R \times 2,38}{3}$$

ou

$$S = \frac{3 \times 2^k}{R \times 2.38}$$

Mais $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ Nous aurons en remplaçant dans l'équation précédente R par sa valeur :

$$S = 4^{\text{dm. car.}}.\,3063.$$

Problème 40

On a un vase cylindrique dont le diamètre intérieur est $0^m,1$. Le vase étant posé sur un plan horizontal par son fonds circulaire, on y verse 12 K. de mercure. On demande

Digitized by Google

à quelle hauteur le liquide s'élèvera ? La densité du mercure est 13,6.

Le volume occupé par le mercure sera évidemment

$$V = \frac{P}{D} = \frac{12.000^{gr}}{13,6}$$

Ce volume est un cylindre ayant une hauteur inconnue h et un diamètre de $0^m.10$ et sera donc exprimé par :

$$\frac{\pi\, d^2\, h}{4}$$

On aura donc :

$$\frac{12.000}{13,6} = \frac{3.1416 \times 100^{c.carr} \times h}{4}$$

et

$$h = \frac{4 \times 12.000}{13,6 \times 3,1416 \times 100} = 11^{cent.}.26.$$

Problème 41

On fait avec de l'or dont la densité est 19,362 des feuilles qui ont un dix millième de millimètre d'épaisseur. Quelle surface pourrait-on recouvrir avec 10 grammes d'or ?

Soit x la surface à recouvrir. Cette surface peut être assimilée à un parallélipipède rectangle dont la hauteur serait $0^m,0000001$ et dont le volume serait exprimé par $x \times 0.0000001$.

D'après la formule $P = VD$, on aura :

$$10^{gr} = x \times 0.0000001 \times 19,362$$

d'où :

$$x = \frac{10}{0.0000001 \times 19.362} = \frac{100000000000}{19,362} = 5164755^{c.c.}$$

Le poids étant exprimé en grammes, cette surface sera exprimée en centimètres carrés. La surface sera donc de :

$$516^{m\,car} - 47^{déc.\,car} - 55^{cent.\,car}.$$

Problème 42

Étant donnée une sphère de cuivre de $0^m.18$ de rayon, creuse et contenant une sphère de platine de $0^m.08$

Digitized by Google

de rayon, de telle sorte qu'il n'y ait aucun vide entre les deux sphères, la densité étant pour la platine 21.53 et pour le cuivre 8.85. On demande le poids de la masse formée ?

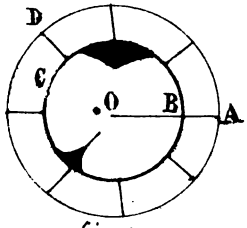


fig. 1

Exprimons les rayons en décimètres pour avoir le poids en kilogrammes.

Nous avons (Fig 1) $OA = 1^{dm}.8$ et $OB = 0^{dm}.5$.

Le volume du cuivre ABCD est $X = Sph.\,OA - Sph.\,OB$

$$= \frac{4}{3}\pi\,(OA^3 - OB^3)$$

Le poids du cuivre sera, d'après la formule :

$$P = VD = \frac{4}{3}\pi\,(\overline{OA}^3 - \overline{OB}^3) \times 8,85.$$

Le volume de la sphère de platine sera :

$$\frac{4}{3}\pi\,\overline{OB}^3$$

et son poids :

$$\frac{4}{3}\pi\,\overline{OB}^3 \times 21,53$$

$$\overline{OA}^3 = \overline{1,8}^3 = 5,832 \qquad \overline{OB}^3 = \overline{0,5}^3 = 0,125$$

d'où :

$$\overline{OA}^3 - \overline{OB}^3 = 5,707$$

Nous aurons donc :

$$P = \frac{4}{3}\pi \times 5,707 \times 8,85 = 211^{k},562$$

$$P' = \frac{4}{3}\pi \times 0,125 \times 21,53 = 11^{k},236$$

$$P + P' = 222^{k},789.$$

Problème 43.

La hauteur d'un cylindre égale 369 mil.m le diamètre de la base égale 246 mil.m. On demande quel est le poids d'un alcool d'une densité de 0,863 contenu dans ce cylindre ?

Pour le poids en grammes, exprimons en centimètres la hauteur et le diamètre donnés.

Digitized by Google

La formule $P = VD$ devient alors :

$$P = \pi \frac{(24,6)^2}{4} \times 36,9 \times 0,863$$

$$= \pi \times 151:29 \times 39,9 \times 0,863 = 15135^{gr}.5$$

$$= 15^{Kil}\ 135^{gr}.5.$$

Problème 44.

Calculer le poids de la grande pyramide d'Egypte, sachant quelle est à plan carré, que chaque côté de la base mesure $23^{m}48$, la hauteur au-dessus du niveau du sol $146^{m},18$ et la densité de la pierre dont elle est formée est 2,75 ?

On aura pour expression du volume de cette pyramide : $V = (23^{m},48)^2 \times \frac{146^{m},18}{3}$

et d'après la formule $P = VD$ on aura :

$$P = (23,48)^2 \times \frac{146,18}{3} \times 2.75.$$

On aura ainsi le poids en milliers de Kilogrammes, puisque le volume est exprimé en mètres cubes. Pour avoir le poids en Kilogrammes, il faudra donc multiplier par 1000 le poids précédent. On aura ainsi :

$$P = (23.48)^2 \times \frac{146.18}{3} \times 2.75 \times 1.000$$

$$= 7387467^{Kil},749.$$

Problème 45.

On donne un cylindre de fonte, dont le diamètre est égal à $0^{m},568$ et la hauteur à $2^{m},739$. On demande de calculer le volume et le poids, sachant que la densité de la fonte est de 7,207 ?

1° Le volume du cylindre sera donné par la formule : $V = \pi R^2 H$; $R = \frac{0^{m},568}{2} = 0^{m},284$.

Exprimons le rayon et la hauteur en décimètres pour avoir le poids en Kilogrammes, nous aurons :

Digitized by Google

$V = \pi R^2 H = 3,1416 \times (2,84)^2 \times 27,39 = 693^{\text{déc. cub.}}898$

2° D'après la formule :

$P = VD$ on aura :

$P = 693^{\text{déc. cub.}},898 \times 7,207 = 5000^{\text{Kil.}},928.$

Problème 46

On demande le prix d'un tuyau de conduite en fonte, ayant $0^{m},245$ de diamètre intérieur, $0^{m},014$ d'épaisseur et 2134^{m} de longueur. La densité de la fonte est 7,207 et son prix $0^{f},20$ le Kilogramme ?

Le volume sera donné par la formule :

$$V = \pi H (R^2 - r^2)$$

$V = 3,1416 \times 2134^{m} \times 0^{m},003626 = 24^{m.\text{cub.}}309336.$

et son poids, d'après la formule :

$P = VD$, sera $24^{m.}309336 \times 7,207 \times 1000 = 175197^{K.}385$

et comme le Kilogramme coûte $0^{f}20$, les $175197^{K},385$ coûteront :

$175197^{K.}385 \times 0^{f.}20 = 35.039^{f.}48.$

Problème 47

Une lame triangulaire de cuivre formant un triangle équilatéral de $0^{m},005$ d'épaisseur, de $1^{m},25$ de côté, a été recouverte d'une couche d'argent de $0^{m.}00015$ d'épaisseur. La densité du cuivre est de 8,95 ; celle de l'argent est de 8,95 ; celle de l'argent est 10,47. On demande le poids de la lame ainsi argentée ?

Appelons S la surface du triangle, V son volume et a le côté. On aura pour la surface :

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(1^{m}25)^2}{4} \times 1.7321 = 676^{\text{déc. carr.}}60156.$$

d'où :

$V = 676,60156 \times 0,005 = 3,3830078.$

Digitized by Google

D'après la formule $P = VD$, le poids du cuivre sera :

$$P = 3,388078 \times 8,95 = 30^{Kil}.27792$$

Calculons maintenant le volume et le poids de la lame argentée.

Pour le volume on a :

$$V = 2 \times 676^{\text{dec. cub}}.65156 \times 0,0015 = 2^{\text{dec. cub}}.02980468.$$

et pour le poids :

$$P = 2^{\text{dec. cub}}.02980468 \times 10,47 = 21^{Kil}.252045.$$

et pour le poids total :

$$P = 30^{K},27792 + 21^{K},252045 = 51^{K},529965$$

Problème 48.

Une sphère d'or vaut 300000 F. La densité de l'or est 19,25 et sa valeur commerciale est 3 F. le gramme. On demande le rayon de cette sphère ?

Le poids de cette sphère est évidemment égal à.

$$\frac{300000}{3} = 100000 \text{ grammes} = 100 \text{ Kil}.$$

Comme l'or a pour densité 19,25, le volume de la sphère sera d'après la formule :

$$V = \frac{P}{D}, \quad V = \frac{100^{K}}{19,25} = 5^{\text{dec. cub}}.194.$$

En appliquant à cette sphère la formule générale :

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

on aura :

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = 5^{\text{dec. cub}}.194$$

d'où :

$$R = \sqrt[3]{\frac{5.194 \times 3}{4 \times 3.1416}} = 0^{m},107$$

Problème 49

Un tube de verre cylindrique de 0m 60 de hauteur est rempli de mercure dont la densité est 13,59. La colonne mercurielle qui remplit le tube pèse 275 gr. On demande le diamètre du tube ?

Un volume d'eau dont le poids serait égal à celui

Digitized by Google

du mercure aurait pour mesure 275 cent. cub. puisqu'un centimètre cube d'eau pèse 1 gr. La densité du mercure étant 13.59, le volume de la colonne mercurielle sera: $\frac{275}{13.59}$. On aura donc à chercher le diamètre d'un cylindre dont le volume est: $\frac{275^{\text{cent. cub}}}{13.59}$ et la hauteur $60^{\text{cent.}}$. D'après la formule $\pi R^2 H$ qui donne le volume d'un cylindre, on aura:

$$\pi R^2 H = \frac{275}{13.59} \text{ d'où ;}$$

$$R = \sqrt{\frac{275}{13,59 \times 0,60 \times 3,1416}} = 0^{m},00328.$$

Le diamètre du tube sera donc:

$$0^{m},00328 \times 2 = 0^{m},00656$$

Problème 50

Deux vases de forme conique et de même poids ont intérieurement $0^{m},25$ de hauteur et $0^{m},12$ de diamètre à leur bord supérieur. L'un est rempli d'acide sulfurique dont la densité est 1,84; l'autre est rempli d'éther dont la densité est 0,71. On demande quelle est la différence entre les poids des deux vases lorsqu'ils sont ainsi remplis?

La formule qui donne la mesure d'un cône est:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{3.1416 \times 36 \times 25}{3} = 942^{\text{cent. cub}}.48.$$

Cherchons maintenant les poids de l'acide sulfurique et de l'éther; nous aurons:

$$P = 942^{K},48 \times 1,84 \text{ pour l'ac. sulfurique}$$

$$P' = 942,48 \times 0,71 \text{ pour l'éther}$$

la différence $P - P'$ sera $942,48\ (1,84 - 0,71)$

$$= 1^{K},065$$

Problème 51.

Les décimes pèsent 10 gr. et sont composés d'un alliage de 0,95 de cuivre, 0,04 d'étain et 0,01 de zinc. La densité du cuivre 8,85, celle de l'étain 7,29 et celle

Digitized by Google

du zinc 7,12. Combien faudrait-il de ces pièces pour fournir le métal nécessaire à la fabrication d'une sphère de même alliage de 0m,25 de diamètre ?

Le volume v d'une pièce de 10 centimes est d'après l'énoncé et d'après la formule $V = \frac{P}{D}$:

$$v = \frac{9,5}{8,85} + \frac{0,4}{7,29} + \frac{0,1}{7,12}$$

En réduisant au même dénominateur et additionnant, il vient :

$$v = \frac{17491755}{15311916}.$$

Le volume de la sphère étant $\frac{4}{3}\pi R^3$, le nombre de pièces sera :

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{v}$$

$$n = \frac{4 \times 3,1416 \times (12^c,5)^3}{3} \times \frac{15311916}{17491755} = 7161,7$$

Problème 52.

On a un tube capillaire qui renferme une colonne de mercure qui, à 0° pèse 1 gr. sur une longueur de 0m,137. On demande le diamètre du tube, la densité du mercure étant 13,598 ?

On a d'après la formule $P = VD$, le poids du mercure contenu dans le tube cylindrique, on en tire :

$$P = \pi r^2 H . D, \text{ d'où :}$$

$$r = \sqrt{\frac{P}{\pi HD}} = \sqrt{\frac{1}{3,1416 \times 13,7 \times 13,598}}$$

$r = 0^m,000413$ donc le diamètre $= 0^m,000826$

Problème 53

Un boulet de fonte pèse 12 Kil. La densité de cette fonte est 7,35 ; on demande le rayon de ce boulet et le poids de l'or nécessaire pour former autour de lui une

Digitized by Google

couche de $0^m,0006$ d'épaisseur, la densité de l'or étant 19,26?

D'après la formule $P = VD$, où $V = \frac{P}{D}$ on a :

$$V = \frac{12}{7,35} = 1^{\text{dec. cub.}}.63265.$$

Le boulet étant sphérique, son volume est représenté par la formule $\frac{4}{3}\pi R^3$; on a donc :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 1^{\text{dec. cub.}}.65265, \text{ d'où :}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{4.39796}{12.56636}} = 0^{\text{dec}}.730$$

Pour calculer le volume de la couche d'or, soit R' le rayon extérieur, lequel égal $0^{\text{dec}}.730 + 0^{\text{m}},006 = 0^{\text{m}},736$. le volume V' de cette couche étant égal à la différence entre le volume total et celui du boulet on a :

$$V' = \frac{4}{3}\pi (R'^3 - R^3) = \frac{4 \times 3,1416 \times 0,009669}{3}$$
$$= 0^{\text{d.c.}},0405015$$

et le poids de cet or sera :

$$40^{\text{c.c.}},5015 \times 19,26 = 780^{\text{gr}},059$$

Problème 54.

On emploie comme mesure de litre, un vase cylindrique dont, intérieurement, la hauteur égale deux fois le diamètre de la base. Ce vase est de Zinc dont la densité est 7,19 et ses parois ont $0^{\text{m}},005$ d'épaisseur. On demande son poids?

Le volume est égal à :

$$\pi r^2 h = 4\pi r^3, \text{ puisque } h = 4r.$$

Ce volume étant 1, on a $4\pi r^3 = 1$, d'où :

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{4 \times 3.1416}} = \sqrt[3]{0,079577}$$
$$= 0^{\text{dec}}.430$$

On aura donc :

$$h = 0^{\text{dec}}.430 \times 4 = 1^{\text{dec}}.72.$$

En représentant par R le rayon extérieur et par v le volume

Digitized by Google

du zinc qui entre dans la paroi latérale, non compris le fond, on a $v = \pi h (R^2 - r^2) = 3,1416 \times 1^{\text{dm}}.72 \times 0,0455$.

$$= 0^{\text{dm cub}}.245681$$

Quant au volume du fond, il égale $\pi R^2 \times 0^{\text{dm}}.05 = 0^{\text{dm cub}}.036191$

Le volume total du zinc sera donc $0^{\text{d}}.245861 + 0^{\text{d}}.036191 =$

$$= 0^{\text{d}}.282052$$

d'où le poids $P = 0,282052 \times 7,19 = 2^{\text{K}}.027^{\text{g}}.954$.

Problème 55

Un vase de forme conique a $0^{\text{m}}.08$ de diamètre à sa base et $0^{\text{m}}.12$ de hauteur; il est placé d'aplomb et rempli de mercure et d'eau dans des proportions telles que le poids de mercure est le triple du poids de l'eau. La température est $0°$; la densité du mercure 13.598; celle de l'eau 1. On demande l'épaisseur de chaque couche de liquide?

Le volume total sera $\frac{1}{3}\pi R^2 H$, celui du mercure sera $\frac{1}{3}\pi r^2 y$, celui de l'eau $\frac{1}{3}\pi(R^2 H - r^2 y)$

Donc le poids du mercure est:

$$\frac{1}{3}\pi r^2 y d, \text{ et celui de l'eau}$$
$$\frac{1}{3}\pi(R^2 H - r^2 y)$$

On aura donc, d'après l'énoncé

$$\frac{1}{3}\pi r^2 y d = \pi(R^2 H - r^2 y)$$

et

$$\frac{1}{3} r^2 y d = R^2 H - r^2 y$$

d'où:

$$y = \frac{3 R^2 H}{r^2(d+3)} = \frac{R^2}{r^2} \times \frac{3H}{d+3}$$

Or:

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{H^2}{y^2} = \frac{144}{y^2}; \text{ donc:}$$

$$y = \frac{144}{y^2} \times \frac{36}{16.598}$$

d'où:

$$y = \sqrt[3]{\frac{144 \times 36}{16.598}}$$

Digitized by Google

En effectuant on trouve :

$$y = 0^m.0678 \text{ et } H - y = 0^m.0522.$$

Problème 56

Quel est le diamètre d'un fil de platine qui pèse 35 gr. par mètre de longueur, en supposant la densité du platine égale à 21 ?

Soit x le rayon du fil exprimé en centimètres, nous aurons :

$$35 = \pi x^3 \times 100 \times 21 \text{ ; d'où l'on tire :}$$

$$x^2 = \frac{35}{2100 \times \pi} = 0.3183098 \times \frac{1}{60}$$

$$x = \sqrt{0.3183098 \times \frac{1}{60}} = 0^c.072835 \text{ ;}$$

donc le diamètre sera :

$$0^c.145670$$

Problème 57

Calculer à 0,001 près le rayon d'une sphère d'argent valant 250 f. La densité de l'argent est 10,474?

Soit R le rayon demandé exprimé en centimètres.

Le volume de la sphère sera donné par la formule :

$V = \frac{4}{3} \pi R^3$ et le poids en grammes de cette sphère sera donc $P = \frac{4}{3} \pi R^3 \times 10,474$.

Un franc pesant 5 gr. 250 f pèseront 250×5

Nous obtiendrons R en posant :

$$250 \times 5 = \frac{4}{3} \pi R^3 \times 10,474$$

$$R^3 = \frac{250 \times 5 \times 3}{4\pi \times 10.474}$$

$$\text{et } R = \sqrt[3]{\frac{250 \times 5 \times 3}{4 \times \pi \times 10.474}} = 0^m.0305421.$$

Digitized by Google

Problème 58.

Un vase sphérique de $60^{m.m}$ de diamètre intérieur est plein de mercure jusqu'à la hauteur de $45^{m.m}$. Quel est le poids du mercure qu'il contient? La densité du mercure est 13,6.

Si nous désignons par R le rayon de la sphère, par $a + R$ la hauteur du segment sphérique occupé par le mercure, son volume sera :

$$\frac{1}{6}\pi(a+R)^3 + \frac{1}{2}\pi(R^2 - a^2)(a+R) \text{ Or } a + R = 45$$

$R = 30$, $a = 15$. Donc :

$$V = \frac{1}{6}\pi(a+R)^2(4R - 2a) = \frac{1}{6}3,1416 \times 45^2 \times 90$$
$$= \frac{1}{3}3,1416 \times 45^3$$

Donc le poids du mercure égale :

$$1,0472 \times 13,6 \times 45^3 = 1^{k}\,297795.$$

Problème 59

Le poids de l'air atmosphérique étant $\frac{1}{770}$ du poids de l'eau, déterminer le poids de l'air contenu dans un cylindre dont la circonférence de la base est $0^{m},3$ et la hauteur $0^{m},8$?

Le volume du cylindre est égal au produit de la base par la hauteur ; il faut donc chercher le rayon de cette base. La circonférence de cette base étant $0^{m},3$ on aura :

$$2\pi R = 0^{m}3, \text{ d'où } R = \frac{3}{2 \times 3.1416} = 0^{dec}.477$$

Le volume du cylindre sera :

$$V = \pi R^2 H = \pi \times (0,477)^2 \times 8 = 5^{2\,m.cub}.718$$

Un mètre cube d'eau pèse un $5^{K}718$. Le poids de l'air étant $\frac{1}{770}$ de celui de l'eau, le poids cherché sera de :

$$\frac{5,718}{770} = 7^{gr}.426$$

Digitized by Google

Problème 60

Quel effort exigerait, pour être soutenu dans du mercure à 0° un décimètre cube de platine, la densité du mercure étant supposée égale à 13,6 et celle du platine à 21,5 ?

L'effort cherché sera évidemment égal au poids du décimètre cube de platine diminué du poids du décimètre cube de mercure déplacé.

La formule $P = VD$ donne :

$P = 1^{dec} \times 21^{K}5$ pour le platine

$P' = 1^{dec} \times 13^{K}6$ pour le mercure.

Les volumes étant exprimés en décimètres cubes, les poids le sont en kilogrammes.

La perte de poids du platine sera donc d'après le principe d'Archimède :

$$21^{K},5 - 13^{K},6 = 7^{K},9$$

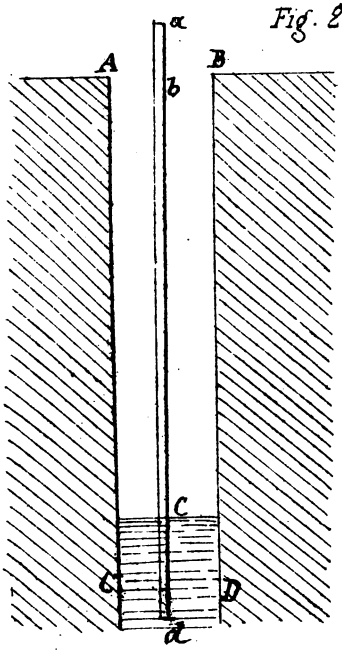
Il faudrait donc un effort égal à $7^{K}.9$ pour soutenir un décimètre cube de platine dans le mercure à 0°.

Problème 61

Pour exploiter une mine de sel gemme, on a percé dans un terrain salifère un trou de sonde dans lequel on a introduit un tuyau de 100^{m} de long qui ne remplit pas exactement l'ouverture et qui dépasse le sol de 1^{m} ; il plonge de $0^{m},75$ dans une dissolution saline dont la densité est 1,3. On verse de l'eau douce dans l'intervalle qui sépare le tuyau des parois du trou de sonde. On demande à quelle hauteur la dissolution montera dans le tuyau ?

Digitized by Google

Fig. 2.



Soit ABCD (Fig. 2) le trou de sonde, a d le tuyau. D'après l'énoncé on aura a b = 1m et c d = 0m,75. Puisque a d = 100m, on aura : b c = 100m − 1m,75 = 98m,25.

Soit CD la surface du niveau de la dissolution saline dans la mine. Si dans l'intervalle ABCD on verse de l'eau douce, cette eau pèsera sur la surface CD et forcera la dissolution à monter dans le tube a d.

Or les compartiments AC et a c peuvent être regardés comme formant deux vases communiquants et l'on sait que dans ces vases les hauteurs sont en raison inverse des densités. On aura donc :

$$\frac{x}{AC} = \frac{1}{1,8}$$ en désignant par x la hauteur de la dissolution dans le tuyau.

Or AC = bc = 98m,25

donc

$$x = \frac{98,25}{1,8} = 75^{m},68.$$

Problème 62.

Une balle de liège sphérique, d'un rayon de 5 centimètres, se tient en équilibre dans l'eau à 4° en y plongeant à une profondeur de 3 centimètres. On demande la densité de ce liège ?

Puisque la sphère se tient en équilibre, le

Digitized by Google

poids de cette sphère est égal au poids de l'eau déplacée par la portion immergée.

En appelant donc la densité cherchée, V le volume de la sphère, v le volume de la partie plongeante on aura :

$$\frac{v}{V} = \frac{d}{1} \text{ d'où } d = \frac{v}{V}$$

Puisque à poids égaux les volumes de deux corps sont en raison inverse des densités :

V, volume de la sphère sera égal à :

$$\frac{4}{3}\pi 5^3 = 523^{cc}.6$$

v, volume du segment sphérique immergé, qui représente le volume de l'eau déplacée, sera :

$$v = \frac{\pi}{2} \times 4 \times (5^2 - 1) + \frac{\pi}{6} \times 4^3 = 184^{cc}.3177.$$

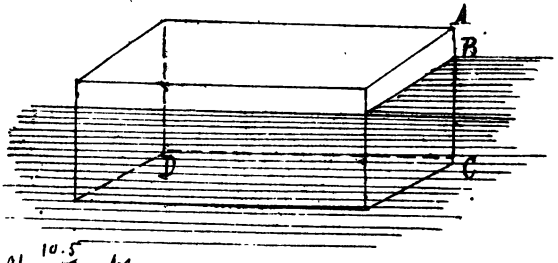
On aura donc :

$$x = \frac{v}{V} = \frac{184^{cc}.3177}{523.6} = 0,352.$$

Problème 63

Un parallélipipède de glace dont les dimensions sont 10m50, 15m75 et 20m45 plongé dans de l'eau de mer. La densité de la glace est 0,930 et celle de l'eau de mer est 1,026. On demande quelle sera la hauteur du parallélipipède au dessus du niveau de la mer ?

fig. 3



Soient AC, CD, CE (Fig 3) les trois arêtes ayant respectivement 10m50, 15m75 et 20m45. Le volume d'un parallélipipède rectangle est égal au produit

$AC = 10.5 - bc$

$10.5 \times .930 = bc \times 1.026$ d'où bc 9m517

$h = 10.5 - 9.517 = 0^m.983$

Digitized by Google

de ses trois dimensions ; on aura donc :

$$V = 25^m45 \times 15^m75 \times 10^m50.$$

Pour exprimer le poids en Kilogrammes, nous aurons :

$$P = 204^{dm}5 \times 157^{d}5 \times 105^{d}0 \times 0.930 = 3145184^K44$$

Soit V' le volume du parallélipipède plongeant dans l'eau ; H la hauteur CB de la partie immergée ; on aura :

$$V' = 204^d,5 \times 157^d,5 \times H$$

Le poids du volume V' d'eau déplacée sera :

$$P = 204^d,5 \times 157^d,5 \times H \times 1\,026.$$

Puisque le glaçon se tient en équilibre, son poids est égal à celui de l'eau déplacée ; On aura donc :

$$H = 204^d,5 \times 157^d,5 \times 1,026 = 3145184^K44$$

d'où $$H = \frac{3145184^K,44}{204,5 \times 157,5 \times 1.026} = 9^m,517$$

La hauteur cherchée AB sera donc :

$$AC - CB = 10^m,5 - 9^m,517 = 0^m983.$$

Problème 64.

Un fil cylindrique en argent de 0^m0015 de diamètre pèse $3^g,2875$ on veut le recouvrir d'une couche d'or de 0^m0002 d'épaisseur. On demande le poids de l'or ainsi employé, sachant que la densité de l'argent est 10,47 ; celle de l'or 19 26.

Soit r le rayon du cylindre d'argent et R le rayon de ce cylindre recouvert d'or ; on a :

$$r = 0^c,075 \text{ et } R = 0^c085$$

$$r^2 = 0^{c.car},005625 \text{ et } R^2 = 0^{c.car},007225$$

Volume du cylindre d'argent $= \pi r^2 H = 0,0176715 \times H$

et d'après la formule $P = VD$, on aura :

$$P = 0,0176715 \times 10,47 \times H = 3^g,2875$$

d'où l'on tire :

$$H = 17^c,768.$$

Digitized by Google

Le volume de la couche d'or sera :

$$\pi H (R^2 - r^2) = V$$

$$V = 3,1416 \times 17^c,768 \times 0,0016 = 0^{c.cub},089312$$

et d'après la formule $P = VD$, le poids P sera :

$$P = 0^{c.cub},089312 \times 19,26 = 1^k,72.$$

Problème 65

Une sphère formée d'un alliage d'or et d'argent pèse dans l'air 84 g^r; on la pèse dans le mercure et l'on trouve que son poids n'est plus que de 22 g^r,6. On demande la densité de cet alliage, la densité du mercure étant 13,6 ?

La perte de poids de la sphère dans le mercure est égale à 84 g^r, − 22 g^r,6 = 61 g^r,4.

D'où la densité de l'alliage par rapport au mercure est : $\frac{84}{61.4}$. Or la densité de l'eau étant 13,6 fois plus petite que celle du mercure, la densité de l'alliage doit être 13,6 fois plus grande que par rapport au mercure ; elle est donc :

$$\frac{84 \times 13,6}{61,4} = 18,55.$$

Problème 66.

On a un cube de plomb de 4 centimètres de côté qu'on veut soutenir dans l'eau en le suspendant à une sphère de liège. Quel diamètre devra avoir celle-ci pour que le système ainsi formé se tienne en équilibre dans l'eau ? Le poids spécifique du plomb est 11,35 et celui du liège 0,24.

Le volume du cube de plomb est 4^3 = 64 centim. cub.

Son poids dans l'air sera donc 64 × 11,35 = 726 g^r,40

Son poids dans l'eau sera 726 g^r,40 − 64 g^r = 662 g^r,40.

Problème 67.

Si l'on représente par r le rayon de la sphère de liège en centimètres son volume sera en centimètres cubes $\frac{4}{3}\pi r^3$; donc son poids en grammes sera : $\frac{4\pi r^3}{3} \times 0.24$. Cela posé, le poids de l'eau déplacée par la sphère de liège étant évidemment, en grammes $\frac{4\pi r^3}{3}$ il en résulte une poussée de bas en haut égale à :

$$\frac{4\pi r^3}{3} - \frac{4\pi r^3 \times 0,24}{3} = \frac{4\pi r^3 \times 0,76}{3}$$

Or, cette poussée doit égaler le poids du plomb, donc :

$$\frac{4\pi r^3 \times 0,76}{3} = 662^{gr},40.$$

d'où l'on tire :

$$r = \sqrt[3]{\frac{1987,20}{304 \times 3,1416}} = 5^{c},92.$$

D'où le diamètre demandé est $11^{c},84$.

Problème 68.

Un morceau de bois, dont la densité est 0,729 a la forme d'un cône droit : on le fait flotter sur l'eau de manière que son axe soit vertical. En mettant d'abord le sommet en bas, puis le sommet en haut, on demande quelle fraction de la hauteur du cône s'enfoncera dans les deux cas.

1° Soient V le volume total du cône, v le volume de la partie immergée ; soient H et h les hauteurs des deux cônes, D la densité du bois, d celle de l'eau.

Les volumes V et v étant de même poids sont en raison inverse de leur densité. On a

$$\frac{V}{v} = \frac{d}{D}, \text{ ou } \frac{H^3}{h^3} = \frac{d}{D}$$

Digitized by Google

d'où $h^3 = \frac{H^3 D}{d}$, d étant égal à 1, et faisant aussi H = 1, il vient $h = \sqrt{D} = \sqrt{0,729} = 0,9$ de H.

2° Dans la seconde position du cône, on a :

$$\frac{V}{V-v} = \frac{d}{D} \quad \text{ou} \quad \frac{H^3}{H^3 - h^3} = \frac{d}{D},$$

d'où $$h^3 = \frac{H^3}{d}(d - D) = 1 - D$$

en faisant :

$$H = 1 \text{ et } d = 1$$

donc on a :

$$h = \sqrt[3]{1 - 0,729} = 0,647 \text{ de } H.$$

Problème 69.

Un verre à vin de champagne de forme conique, a intérieurement 0^m06 de diamètre au bord ; il a été complètement rempli de mercure, d'eau et d'huile en proportion telle que la couche formée par chacun de ces liquides ait 0^m05 d'épaisseur. On sait que la densité du mercure est 13,596, celle de l'huile 0,915 et celle de l'eau 1. Calculer le poids du mercure, de l'eau et de l'huile, en négligeant l'influence de la température sur la densité de ces liquides ?

D'après l'énoncé, on a $om = 5^c$ et $oK = Ki = ia = 5^c$. De plus les triangles oma, Kna et ipa étant semblables, il s'en suit que $ip = \frac{1}{3} om = 1$ et $Kn = \frac{2}{3} om = 2$. Cela posé, le mercure se trouvant à la partie inférieure, puis l'eau et l'huile, le volume du cône a pob occupé par le mercure égale :

$$\pi \, \overline{ip}^2 \times \frac{ai}{3} = \frac{3,1416 \times 1 \times 5}{3} = 5^{d.cub},236$$

Les volumes d'eau et d'huile sont des tronc de cônes qui se mesurent au moyen de la formule :

Digitized by Google

$$\pi(R^2+r^2+Rr)\times\frac{H}{3}$$

dans laquelle R et r sont les rayons des bases du tronc et H sa hauteur.

Par conséquent, le volume d'eau :

$$bcnp \quad \frac{3,1416\times 5}{3}(4+1+2)=30^{c.cub.}652.$$

et le volume d'huile :

$$cdmn=\frac{3,1416\times 5}{3}(9+4+6)=99^{c.cub.}484.$$

Une fois ces volumes connus, on aura les poids demandés, d'après la formule $P=VD$, en multipliant chaque volume par la densité correspondante. On trouve ainsi que le poids de mercure est $5,236\times 13,596=71^{gr}188$.

celui de l'eau $36,652\times 1 = 36,652$

et celui de l'huile $99,484\times 0,915 = 91,027$

Problème 70.

Quel est le rapport des poids x et y de deux cylindres l'un de fer et l'autre de platine qu'il faudrait attacher ensemble, pour que le système pût se maintenir en équilibre au milieu du mercure ? La densité du platine est 21, celle du mercure 13.6 et celle du fer 7,8.

Appelons P le poids du cylindre de fer, P' le poids du cylindre de platine, r leur rapport ; le principe d'Archimède donne :

$$P+P'=\left(\frac{P}{7,8}+\frac{P'}{21}\right)13,6,$$

d'où l'on aura le rapport en posant :

$$r+1=\left(\frac{r}{7,8}+\frac{1}{21}\right)13,6$$

de cette égalité on tire le rapport demandé :

$$r=0,4739.$$

Digitized by Google

Problème 71.

Une couronne pesant 300 gr. est formée d'or et d'argent ou d'un alliage de ces deux métaux ; on la pèse dans l'eau et l'on trouve qu'elle a perdu 20 gr. de son poids ; on demande quelle est la composition de la couronne sachant que la densité de l'or est 19,5 et celle de l'argent 10,5?

Soit x le poids de l'or et y le poids de l'argent contenus dans la couronne, on a d'abord l'équation :

$$x + y = 300$$

La couronne perdant 20 gr. Quand elle est plongée dans l'eau déplace un volume d'eau égal au sien et pesant 20 gr. Or, en vertu de la formule $P = VD$, le volume de l'or de la couronne est, $\frac{x}{19.5}$ et celui de l'argent $\frac{y}{10.5}$; on a donc la seconde équation :

$$\frac{x}{19,5} + \frac{y}{10,5} = 20$$

En résumant ces deux équations on trouve :

$x = 195$ grammes pour l'or

et $y = 105$ grammes pour l'argent

Problème 72.

On demande quelle perte de poids éprouvent par le seul fait de la poussée de l'air 100 Kil. de bois, dont le poids spécifique rapporté à l'eau égale $\frac{6}{10}$. Le litre d'air dans les conditions de l'expérience pèse 1gr. 293.

Chaque décimètre cube de bois pèse les $\frac{6}{10}$ de 1000gr. poids d'un décimètre cube d'eau, soit 600 gr. le volume du bois a donc pour expression en décimètres cubes : $\frac{1000}{6}$.

En vertu du principe d'Archimède ce bois perd une partie de son poids égale au poids du volume d'air déplacé.

Or, le litre d'air pèse 1gr. 293.

Digitized by Google

Donc le poids de l'air déplacé, correspondant à la perte éprouvée par le bois est :

$$\frac{1000 \times 18^{gr}, 293}{6} = \frac{1,293^{gr}}{6} = 215^{gr},5.$$

Problème 73.

On veut lester un cylindre de bois de longueur égale à 1^{m} de manière à ce qu'il effleure dans l'eau jusqu'à sa partie supérieure. On prend pour lest un cylindre de même section droite que le cylindre de bois, et l'on fixe ce cylindre de platine à la partie inférieure du cylindre de bois, de façon à ce qu'il en soit le prolongement ; la densité du bois est 0,5 ; celle du platine est 21,5. On demande quelle longueur il faut donner au cylindre de platine pour satisfaire à la condition énoncée ?

Soit x la longueur du cylindre de platine en décimètres, b la section droite ; le poids du bois sera :

$$b \times 10 \times 0,5 \text{ Kilogr.}$$

Le poids du platine sera :

$$b \times x \times 21,5 \text{ Kilogr.}$$

Ces deux poids réunis devront faire équilibre au poids du volume d'eau déplacée par l'ensemble de ces deux cylindres. Ce poids est égal à :

$$b\,(10+x)$$

On a donc l'équation :

$$b + (10 \times 0,5 + x \times 21,5) = b\,(10+x)$$

d'où

$$20,5\,x = 5 \text{ et } x = \frac{5}{20,5} = 0^{\text{déc.}},244.$$

Problème 74.

Un morceau de liège verni pèse 30 gr. Dans

Digitized by Google

l'air ; une boule de plomb pèse 110 gr. dans l'eau. Le liège et le plomb liés ensemble, suspendus par un fil à l'un des plateaux d'une balance et plongés entièrement dans l'eau ne pèsent plus que 15 gr. Quel est le poids spécifique du liège ?

En ajoutant au poids de plomb plongé dans l'eau, les 30 gr. que pèse le liège, on aurait 140 gr. et, puisque ces deux corps réunis et plongés dans l'eau ne pèsent que 15 gr., le liège a donc déplacé un volume d'eau, qui pèse 140 gr. – 15 gr. ou 125 gr. Il suffira donc de diviser 30 gr. poids du liège dans l'air, par 125 gr., poids du volume d'eau déplacé par le liège, pour avoir le poids spécifique du liège. On a donc :

$$d = \frac{30}{125} = 0,24$$

Problème 75.

On teste une sphère de liège ayant un diamètre de 6 centimètres au moyen d'une sphère d'or. On demande quel devra être le diamètre de cette dernière pour que le système se tienne en équilibre au milieu de l'alcool. On prendra pour densité du liège 0.24, pour celle de l'or 19,26 et pour celle de l'alcool 0,8.

La somme des volumes des deux sphères est évidemment égale au volume de l'alcool déplacé, et puisque le système se tient en équilibre, le poids de l'alcool déplacé est égal aux poids réunis des deux sphères.

Le volume de la sphère de liège étant :

$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{6}{2}\right)^3 = 113^{c.c}.293$$

son poids sera :

$$113^{c.c},293 \times 0,24 = 27 \text{ gr. } 1803.$$

Appelons r le rayon de la sphère d'or, nous aurons pour expression de son volume :

Digitized by Google

$\frac{4}{3}\pi r^3$ et pour son poids.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 \times 19,26.$$

Le volume de l'acool déplacé sera évidemment.

$$113^{c.c},293 + \frac{4}{3}\pi r^3$$

Et son poids sera :

$$\left(113^{c.c},293 + \frac{4}{3}\pi r^3\right) \times 0.80 = \frac{3,2}{3}\pi r^3 + 90,6344.$$

Ce poids étant égal à la somme des poids des deux sphères, nous aurons l'égalité:

$$27,1803 + \frac{4}{3}\pi r^3 \times 19,26 = \frac{3,2}{3}\pi r^3 + 90,6344$$

et en dégageant r^3, on a :

$$r^3 = \frac{90,6344 - 27,1803}{\frac{4}{3}\pi(19,26 - 0,80)}$$

et $r = \sqrt{\dfrac{90,6344 - 27,1803}{\frac{4}{3}\pi\, 19,26 - 0,80}} = 9^{m},4^{m}$

Et enfin pour le diamètre cherché on aura :

$$d = 2r = 2 \times 9^{m},4^{m} = 18^{m},8^{m}.$$

Problème 76.

Un vase cylindrique, ayant un rayon de $0^{m},50$ contient de l'eau jusqu'à $1^{m},5$ de sa hauteur. On immerge dans cette eau un bloc de pierre pesant 658 Kilog. et dont la densité est 2,308. On demande à quelle hauteur du fond se trouvera le niveau de l'eau après l'immersion?

Cherchons d'abord le volume de l'eau ; on aura :

$$V = \pi r^2 H = \pi \times (0,50)^2 \times 1,5 = 1178^{lit},1.$$

Le volume de la pierre immergé sera :

$$V' = \frac{P}{D} = \frac{658^{K}}{2,308} = 285^{lit},528.$$

Digitized by Google

Le volume total après l'immersion sera donc :

$$1178^{lit},1 + 285^{l},528 = 1463^{lit},628.$$

Appelons H la hauteur de l'eau après l'introduction du bloc ; nous aurons alors l'équation :

$$V = \pi r^2 H = \pi \times 25^{d.cm} \times H = 1463^{lit},628$$

d'où $H = \frac{1463^{l},628}{257 \times 3,1416} = 1^{m},86.$

Problème 77.

Un verre à pied A (fig. 4) présentant la forme d'un cône renversé est entièrement rempli par du mercure et de l'eau à poids égaux. Le diamètre a b de son bord est de $0^{m},35$ et son volume intérieur est égal à 1 litre. Quelle est l'épaisseur de la couche d'eau ? La densité du mercure est 13,593 et toutes les données se rapportent au maximum de densité de l'eau ?

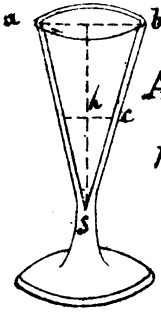


fig. 4

Pour trouver la hauteur H du cône formé par le vase, nous avons l'équation :

$$V = \pi r^2 \frac{1}{3} H$$

d'où

$$H = \frac{3V}{\pi r^2}$$

En remplaçant les lettres par leurs valeurs on aura :

$$(1) \quad H = \frac{3}{3,1416 \times (0,175)^2}$$

En appelant V' le volume qu'occupera le mercure, celui occupé par l'eau sera : $V' \times 13,593$ puisque à poids égaux les volumes de deux corps sont en raison inverse des densités.

Puisque les deux volumes du mercure et de l'eau

Digitized by Google

occupent 1 litre on aura l'équation :

$$V' + 13,595\, V' = 1^{\text{lit.}}$$

d'où l'on tire :

$$V = \frac{1}{1 + 13,595}$$

d'un autre coté, en appelant H' la hauteur du mercure hs, r' le rayon hc de la base du cône que forme le mercure, on trouvera pour le volume V'

$$(2) \qquad V' = \frac{1}{3} H' \times \pi \times r'^2 = \frac{1}{1 + 13,595}$$

Mais on a :

$$\frac{r}{r'} = \frac{H}{H'}$$

d'où

$$r' = \frac{H' r}{H} = \frac{H' \times 0,175}{H}$$

En remplaçant dans l'équation (2) r' par cette valeur et H par sa valeur tirée de l'équation (1), on aura :

$$\frac{1}{1 + 13\ 595} = \frac{1}{3} H'.\pi.H'^2.(0,175)^2.\ \pi^2 \frac{(0,175)^4}{3^2}$$
$$= \frac{\pi^3.H'.(0,175)^6}{27}$$

d'où l'on tire pour la hauteur du cône de mercure :

$$H' = \frac{3}{\pi.(0,175)^2 \sqrt{14,593}} = 0^{m},012750 9.$$

quant à la hauteur totale H, on a :

$$H = \frac{3}{3,1416 \times (0,175)^2} = 0^{m},0311813$$

La hauteur de la couche d'eau $H - H'$ sera donc

$$0^{m},0311813 - 0^{m},0127509 = 0^{m},0184214.$$

Digitized by Google

Problème 78.

Un prisme de glace qui flotte sur la mer a une densité de 0,914. Celle de l'eau de la mer est 1.026. On demande la hauteur de ce prisme sachant qu'il s'élève à 3m au-dessus du niveau de l'eau :

Soit H la hauteur du prisme de glace. La hauteur de la partie immergée est indépendante de la surface de la base du prisme ; nous pouvons donc prendre pour surface de cette base, l'unité de surface 1 mètre carré.

Le volume du prisme sera donc :

$$V = 1^{m.car} \times H$$

et son poids :

$$1 \times H \times 0,914.$$

Le volume d'eau déplacé est :

$$1 \times (H - 3)$$

et son poids, puisque le prisme flotte, égale celui du prisme. Ce poids peut aussi être représenté par :

$$1 \times (H - 3) \times 1,024$$

on peut donc poser l'équation :

$$(H - 3)\ 1,024 = H \times 0,914.$$

d'où

$$H = \frac{3 \times 1.026}{1,026 - 0,914} = 27^{m},48.$$

La hauteur de la partie immergée sera :

$$27^{m},48 - 3 = 24^{m},48.$$

Digitized by Google

Problème 79.

On pèse un culot métallique dans un gaz dont la densité, par rapport à celle de l'eau, est 0,0012 et dans un liquide dont la densité est 0,80. Le poids dans le gaz est 90 gr.; celui dans le liquide est 90 gr. On demande la densité de ce métal?

Prenons pour unité la densité du liquide et appelons a la densité du gaz par rapport à celle du liquide, le poids du corps dans le vide sera exprimé par : $P = \frac{P - ap'}{1-a}$ en appelant p le poids dans le gaz et p' celui dans le liquide.

On aura donc :

$$P = \frac{90 - a \times 80}{1 - a}$$

Or d'après les données du problème on a :

$$a = 0,0012 \times 0,80 = 0,00096.$$

On aura donc pour poids du corps dans le vide :

$$P = \frac{90 - 80 \times 0,00096}{1 - 0,00096} = 90^{gr},0096.$$

Il a donc perdu dans le liquide $10^{gr}.0096$.
Le poids qu'il perdrait dans l'eau serait :

$$10^{gr},0096 \times \frac{1}{0,8} = 12^{gr},512.$$

Sa densité par rapport à celle de l'eau est donc :

$$\frac{90,0096}{12,512} = 7,1938.$$

Problème 80.

La densité de l'eau étant 1 et celle de l'acide azotique 1,48, on demande quelle est la quantité d'eau qu'il faut ajouter à 1000 gr. d'acide azotique

Digitized by Google

pour qu'un litre de mélange pèse 1.Kil 290?

Le volume d'un Kilogramme d'acide azotique à 1,48 est représenté par :

$$\frac{1}{1,48} \text{ litres.}$$

Le volume du mélange sera :

$$x + \frac{1}{1,48}$$

et son poids :

$$\left(x + \frac{1}{1,48}\right) 1,29.$$

en désignant par x la quantité d'eau en Kilogrammes qu'il faut ajouter pour amener l'acide azotique à la densité 1,29.

Le poids du mélange peut aussi se représenter par $1+x$; on a donc l'équation :

$$1+x = \left(x + \frac{1}{1,48}\right) 1,29$$

d'où :

$$x - 1,29\,x = \frac{1,29}{1,48} - 1$$

$$1,29\,x = 1 - \frac{1,29}{1,48}$$

$$x(1,29-1) = 1 - \frac{1,29}{1,48}$$

$$x = \frac{1 - \frac{1,29}{1,48}}{1,29-1} = 0^{\text{Kil.}}\,442^{\text{gr.}},68.$$

Problème 81.

Un ballon gonflé par l'hydrogène a un volume de 200 mètres cubes. Le poids de la nacelle, des cordages

Digitized by Google

et de l'enveloppe est de 60 kilogrammes. Le poids du litre d'air est 1 gr. 3; la densité de l'hydrogène est 0,0688 de celle de l'air. On demande quel poids ce ballon pourra soulever au moment du départ?

Ce poids sera égal à la différence entre le poids de l'air déplacé et le poids total du ballon.

Le volume d'air déplacé étant 200 mètres cubes, son poids sera :

$$200 \times 1^{K},3 = 260^{K}.$$

Le poids de l'hydrogène du ballon sera :

$$200 \times 1^{K},3 \times 0,0688 = 17^{K},888.$$

Le poids de l'enveloppe, des cordages et de la nacelle étant 60^{K}, le poids total du ballon sera :

$$60^{K} + 17^{K},888 = 77,888.$$

La différence entre ce poids et celui de l'air déplacé est :

$$260^{K} - 77,888 = 177^{K},112.$$

Le ballon pourra donc soulever, au moment du départ un poids de 177,112. Cela revient à dire que la force ascentionnelle, au moment du départ est $177^{K},112$.

Problème 82.

Pour faire équilibre au poids d'un lingot de platine placé dans le plateau d'une balance, on a placé dans l'autre plateau un poids de 27 grammes en cuivre jaune: Combien aurait-il fallu en mettre si la pesée avait été faite dans le vide? Le poids spécifique du platine est 22; celui du cuivre jaune 8,3, celui de l'air à 0° et sous la pression $0^{m},76$, conditions de température et de pression dans lesquelles on opère est 0,0013, le poids spécifique de l'eau étant pris pour unité.

Digitized by Google

Appelons P le poids vrai du lingot de platine ; son volume sera $\frac{P}{D} = \frac{P}{22}$; le poids du volume d'air qu'il déplace sera :

$$\frac{P}{22} \times 0,0013.$$

La pression que le lingot exerce sur le plateau est donc :

$$P - \frac{P\,0,0013}{22}$$

d'un autre côté le poids de cuivre jaune exerce sur le plateau une pression réelle qui est représentée par :

$$27 - 27 \times \frac{0,0013}{8,3}$$

Comme ces deux pressions doivent être égales pour que les plateaux soient en équilibre, on aura l'équation :

$$P - P \times \frac{0,0013}{22} = 27 - 27 \times \frac{0,0013}{8,3}$$

$$P\left(1 - \frac{0,0013}{22}\right) = 27\left(1 - \frac{0,0013}{8,3}\right)$$

d'où : $$P = 27 \times \frac{1 - \frac{0,0013}{8,3}}{1 - \frac{0,0013}{22}}$$

et $$P = 27\left(\frac{(8,3 - 0,0013)\,22}{(22 - 0,0013)\,8,3}\right) = 26^{gr}.997$$

$26^{gr}.997$ est donc le poids marqué qu'il aurait fallu pour faire équilibre au lingot de platine, si la pesée avait été faite dans le vide.

Problème 83.

On veut construire un aérostat capable d'enlever 1250 Kilogrammes avec une force ascentionnelle de 10 Kil.

Digitized by Google

On demande quel devra être son volume :

1° Pour le cas où l'on se servirait d'hydrogène pour le remplir. Densité de l'hydrogène 0,0693

2° Pour le cas où l'on se servirait, à cet effet de gaz d'éclairage d'une densité de 0,408.

On négligera dans ce calcul le volume de l'enveloppe, des cordages et de la nacelle.

Problème 84.

On donne un ballon sphérique pesant vide $63^{gr},62$ on le gonfle avec de l'hydrogène et on demande la force ascentionnelle du ballon sachant que $0^{k},100$ d'hydrogène déplacent un mètre cube d'air et que le mètre carré de taffetas qui forme l'enveloppe pèse $0^{gr},20$ sachant aussi que le litre d'air pèse $1^{gr},33$ dans les conditions de l'expérience?

La surface du ballon sera :

$$\frac{63,62}{0,20} = 318^{m.car.}$$

Cette surface est celle d'une sphère, on a donc :

$$4 \pi R^2 = 318^{m.car.}$$

d'où $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{318}{3,1416}}$

d'où l'on tire :

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{318000}{31416}} = \frac{1}{2}\sqrt{101} = \frac{10}{2} = 5^{m}$$

Ayant ainsi déterminé le rayon, nous trouverons le volume de la sphère par la formule :

$$\frac{4}{3}\pi R = \frac{4 \times 3,1416 \times 125}{3} = 525^{m.cub.},600.$$

Le poids de l'air déplacé sera obtenu en multipliant ce volume par le poids du mètre cube d'air.

On a ainsi :

Digitized by Google

Poids de l'air déplacé : $523^{m.c.}600 \times 1^{k}.33 = 696^{k}.388$.

Comme $0^{k}.100$ d'hydrogène déplacent 1 mètre cube d'air et que le volume de l'hydrogène est égal à celui de l'air déplacé, nous aurons pour poids de l'hydrogène :

$$523^{m.c.},600 \times 0^{k}.100 = 52^{k}.100.$$

la force ascentionnelle demandée sera égale à l'excès du poids de l'air déplacé sur le poids du ballon. Ce dernier poids est égal au poids de l'hydrogène $32^{k}.360$ augmenté du poids de l'enveloppe $63^{k}.62$ soit $52^{k}.423,62$

Le poids de l'air déplacé est : $696^{k}.388$.

La force ascentionnelle demandée est donc :

$$696^{k},388 - 52^{k},423,62 = 643^{k},964,38$$

Problème 85.

Sous le récipient d'une machine pneumatique contenant de l'air sec à la pression $0^{m}.76$ et à 0°, on place un fléau de balance aux deux extrémités duquel sont suspendus deux cubes ; l'un à 3 centim. de coté et pèse $26^{gr}.3240$; l'autre qui a 5 centim. de coté pèse $26^{gr}.2597$. Par suite de cette inégalité de poids le fléau n'est pas en équilibre. On fait un vide partiel sous le récipient et l'on demande quelle pression indiquera l'éprouvette de la machine quand l'équilibre sera rétabli. On suppose que la température est restée constante et que les deux bras du fléau sont d'égal volume. On sait que le poids du litre d'air sec à 0° et sous la pression $0^{m}.76$ est $1^{gr}.293$?

Désignons par V et V' les volumes exprimés en décimètres cubes, des deux cubes par p et p' leurs poids ; par H la pression $0^{m}.76$; par X la pression cherchée et par P le poids du litre d'air à 0° et $0^{m}.76$.

Calculons d'abord les poids de ces deux corps dans le vide. Le premier pèsera p plus le poids de l'air qu'il

Digitized by Google

déplace poids égal à VP ce qui donne pour le poids du premier corps :

$$p + VP.$$

en raisonnant de la même manière, nous aurons pour poids du second cube :

$$p' + V'P.$$

Pour avoir le poids de chacun de ces cubes à la pression inconnue x, il suffit de retrancher de deux expressions précédentes le poids du volume d'air déplacé par chacun d'eux à cette pression x le poids sera égal pour le premier à :

$$VP \times \frac{x}{H}$$

et pour le second à :

$$V'P \times \frac{x}{H}$$

Problème 86.

Comme, à cette pression x, l'équilibre est établi, on peut pour l'égalité suivante :

$$p + VP - \frac{VPx}{H} = p' + V'P - \frac{V'Px}{H}$$

d'où enfin :

$$x = \frac{H[p' - p + P(V' - V)]}{P(V' - V)}$$

Appliquant cette équation à l'exemple donné on aura :

$$x = \frac{0,76\,[26,2597 - 26,324 + 1,293\,(0,125 - 0,027)]}{1,293\,(0,125 - 0,027}$$

$$x = \frac{0,76 \times 0,062414}{1,293 \times 0,098} = 0^{m},374$$

Digitized by Google

Lorsque la pression sous le récipient sera devenu égale à $0^m,374$, le poids apparent des deux cubes sera donc le même.

Problème 87.

Une balance parfaitement juste sur l'un de ses plateaux un morceau de platine et sur l'autre un morceau de cire qui se font équilibre dans l'air. On demande de calculer le rapport des poids de ces deux corps en tenant compte de la poussée de l'air. On prendra pour poids spécifique : pour le platine 21; pour la cire 0,96 ; pour l'air 0,0013.

Appelons P le poids du platine, son volume sera $\frac{P}{21}$ et le poids de l'air qu'il aura déplacé sera :

$$\frac{P}{21} \times 0,0013$$

Soit P' le poids de la cire, son volume sera $\frac{P'}{0,96}$ et le poids de l'air déplacé :

$$\frac{P'}{0,96} \times 0,0013$$

$P - \frac{P}{21} \times 0,0013$ et $P' - \frac{P}{0,96} \times 0,0013$ seront les poids apparents des deux corps dans l'air. Or comme ces poids apparents sont égaux on peut établir l'équation :

$$P - \frac{P}{21} \times 0,0013 = P' - \frac{P'}{0,96} \times 0,0013$$

d'où :

$$P\left(1 - \frac{1}{21} \times 0,0013\right) = P'\left(1 - \frac{1}{0,96} \times 0,0013\right)$$

d'où :

$$\frac{P}{P'} = \frac{21(0,96 - 0,0013)}{0,96(21 - 0,0013)} = 0,9987.$$

Digitized by Google

Exercices sur le Sphéromètre et la machine à diviser.

Problème 88.

Une lame de verre à faces parallèles a été posée sur une surface plane, sous la pointe de la vis d'un sphéromètre; le contact a été établi. La vis avait été remontée de 25 tours plus de 216 des 360° en lesquels est divisée la tête de la vis. Le pas de la vis est égal à $\frac{1}{2}$ millimètre. On demande l'épaisseur de la lame ?

Le pas de la vis étant $\frac{1}{2}$ millimètre, chaque tour que fait la vis correspond à une épaisseur de $\frac{1}{2}$ millimètre. Les 25 tours correspondent donc à $25 \times 0^{mm},5 = 12^{mm},5$.

Les 360° degrés correspondant à un tour de la vis valent également $\frac{1}{2}$ millimètre; les 216° vaudront donc $\frac{216}{360} \times 0,5 = 0^{mm},3$.

L'épaisseur de la lame sera donc :

$$12^{mm},5 + 0^{mm},3 = 12^{mm},8.$$

Problème 89.

250 feuilles d'or superposées ont été placées sur une surface plane, recouvertes d'une lame de verre d'une épaisseur de $12^{mm},8$ et posées sous la pointe de la vis d'un sphéromètre. Il a fallu remonter la vis de 27 tours et 310° pour établir le contact. Quelle est l'épaisseur d'une feuille d'or, sachant que le pas de la vis est de $\frac{1}{2}$ millimètre ?

Les 27 tours équivalent à une épaisseur de $27 \times 0^{mm},5 = 13^{mm},5$.

Digitized by Google

Les 310° valent $\frac{310}{360} \times 0^{mm},5 = 0^{mm},43056$.

Ensemble $13^{mm},93056$.

mais l'épaisseur de la lame de verre est $12^{mm},8$; celle des 250 feuilles d'or sera donc :

$$13^{mm},93056 - 12^{mm},8 = 1^{mm},13056.$$

chaque feuille aura donc une épaisseur de :

$$\frac{1^{mm},13056}{250} = 0^{mm},004222.$$

Problème 90.

Les trois pieds d'un sphéromètre sont les sommets d'un triangle équilatéral et sont éloignés l'un de l'autre de 5 centimètres. On place le sphéromètre sur une sphère de manière à ce que le contact s'établisse pour les trois pieds et pour la vis centrale. Pour arriver à ce résultat, il a fallu remonter la vis de 13^{mm} au dessus du plan passant par les pieds. Quel est le rayon de cette sphère ?

Appelons a le coté du triangle formé par les trois pieds. Le plan passant par ces trois pieds coupe la sphère suivant un petit cercle qui est circonscrit à ce triangle. Le rayon de ce cercle sera $AC = \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{c\sqrt{3}}{3}$

Appelons h l'élévation de la pointe de la vis au dessus du plan de ce petit cercle.

Soient $ABDF$ un grand cercle quelconque ayant son plan perpendiculaire à celui du petit cercle, AD le diamètre du petit cercle et DF celui du grand.

Nous aurons $h = BC$; $AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $BF = 2R$.
R étant le rayon demandé.

On a :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \frac{a^2}{3} + h^2 \text{ et } \overline{AB}^2 = BF \times BC = h \times 2R$$

Digitized by Google

d'où l'on tire :

$$h \times 2R = \frac{a^2}{3} + h^2 \quad \text{et}$$

$$R = \frac{\frac{a^2}{3} + h^2}{2h} = \frac{a^2 + 3h^2}{6h}$$

remplaçant a et h par leurs valeurs, il vient :

$$R = \frac{\frac{5^2}{3} + 1,2^2}{2 \times 1,3}$$

$$\frac{25 + 5,07}{7,8} = 3^{\text{cent.m}}855.$$

Problème 91.

Un tube de verre long de 308 millimètres doit être divisé en 200 parties égales. On se sert pour cet usage d'une machine à diviser dont le pas de vis est égal à $0^{m.m}75$, et dont la tête de la vis est divisée en 360°. On demande quel est le nombre de tours et de fraction de tour dont il faut faire avancer la vis pour chaque division ?

La longueur de 308 millimètres correspondra à autant de tours que $0^{m.m}75$ sera contenu dans $\frac{308}{0,75} = 410$ tours plus 240°.

Pour une division on aura donc 200 fois moins ; en effectuant ce calcul on trouve pour une division : 2 tours, 19°. 2

Digitized by Google

Problèmes sur la pression atmosphérique et la force élastique des Gaz.

Problème 92.

Quelle est, en Kilogrammes, la pression exercée sur une surface de 1 mètre carré quand le mercure dans le baromètre a $0^m,76$ de hauteur ?

La pression atmosphérique faisant équilibre à une colonne de mercure de $0^m,76$ de hauteur, la pression exercée sur un mètre cube de surface sera égale au poids d'une colonne de mercure ayant 1 m. carré de base et une hauteur de $0^m,76$.

Le volume de cette colonne est :

$$1^{m.\,carré} \times 0^m,76 = 760^{déc.\,cub.}$$

La densité du mercure étant 13,59, le poids de cette colonne sera :

$$760^{dec\,cub} \times 13^K,59 = 10328^K,4$$

Problème 93.

Un récipient ayant une capacité de 10 litres renferme de l'air à la pression atmosphérique qui est égale à $0^m,76$ de mercure.

Le récipient est fermé par une soupape dont la section est $32^{c.\,car.}$ un poids de 25 Kilos pèse sur cette soupape. On demande quel poids d'air il faudrait injecter dans le récipient pour que la soupape se soulevât. La température est 30°; la densité de l'air à 0° et $0^m,76$ est $\frac{1}{773}$, celle de l'eau étant prise pour unité. Le coéfficient de dilatation des gaz est 0,0367; Le poids spécifique du mercure est 13.5 et le récipient est placé dans l'air, de sorte que la pression atmosphérique s'exerce librement sur toutes les faces.

Il n'y a pas à tenir compte de l'air qui se trouve

Digitized by Google

primitivement dans le récipient, puisqu'il est à la pression de l'air extérieur. Soit donc H la pression de l'air qu'il faut introduire, exprimée en centimètres de mercure.

$\frac{H \times 13.5}{1000}$ sera en Kilogrammes la pression qu'exercera cet air par centimètre carré.

La pression intérieure sur la surface de la soupape sera donc :

$$\frac{32 \times H \times 13,5}{1000}$$

Cette pression doit être égale à celle exercée à l'extérieur par le poids de 25 Kilog.

On a donc l'équation :

$$\frac{32 \times H \times 13,5}{1000} = 25^{K}$$

d'où :

$$H = \frac{25 \times 1000}{32 \times 13,5} = 57^{c},8$$

Pour avoir le poids des 10 litres d'air à la température 30° et à la pression $H = 57^{c},8$ qu'il a fallu injecter, on aura la formule :

$$P = \frac{10 \times \frac{1}{773}}{1 \times 0,00367 \times 30} \times \frac{57^{c},8}{76}$$

Problème 94.

Le volume d'air d'une éprouvette d'une machine à compression est de 137 parties. Par le jeu de la machine, le volume s'est réduit à 25 parties et le volume s'est élevé dans l'éprouvette de $0^{m},45$. On demande le rapport entre la quantité primitive d'air du récipient et la quantité qui s'y trouve après l'expérience.

L'air de l'éprouvette étant à la pression de

Digitized by Google

1 atmosphère quand son volume est 137 et à la pression H quand ce volume est devenu 25, nous aurons d'après la loi de Mariotte $H \times 25 = 137 \times 1$

D'où :

$$H = 5^{atm}.48$$

Quant à la hauteur du mercure dans l'éprouvette elle équivaut en atmosphères à $\frac{45}{76} = 0^{atm},59$.

La pression de l'air dans le récipient faisant équilibre à la pression de l'air de l'éprouvette augmentée de la colonne de mercure qui s'élève dans celle-ci, il faut que la pression dans le récipient soit égale à :

$$5^{atm}.48 + 0^{atm}.59 = 6^{atm}.07.$$

La pression de l'air dans le récipient étant devenue 6,07 fois plus grande, il en est de même de la masse d'air et le rapport demandé est donc :

$$\frac{1}{6,07}$$

Problème 95.

La densité de l'hydrogène étant $\frac{1}{14.5}$ de celle de l'air, on demande 1° à quelle pression il faudrait soumettre l'hydrogène pour qu'un litre de ce gaz pèse autant qu'un litre d'air à la pression $0^m.76$. 2° Quel volume serait réduit un litre d'hydrogène à 0.76 si sa pression augmentait jusqu'à ce qu'il pèse, à volume égal, autant que l'air à $0^m.76$?

1° D'après la loi de Mariotte, les poids des gaz étant proportionnels aux pressions que ces gaz supportent, il faudrait soumettre l'hydrogène à une pression 14,5 fois plus forte que celle de l'air pour qu'à volume égal leurs poids soient égaux. Il faudrait donc soumettre l'hydrogène à une pression de $0^m,76 \times 14,5$ de mercure.

Digitized by Google

qui ajoutée à la pression atmosphérique donne une pression de $14^{atm}.5$.

2° Puisqu'il faut soumettre l'hydrogène à une pression égale à $14^{at}.05$ et que les volumes des gaz sont en raison inverse des pressions qu'ils supportent, le litre d'hydrogène sera réduit, pour satisfaire aux conditions de l'énoncé à

$$\frac{1}{14,5} = 0^{lit},0688$$

Problème 96.

Un litre d'air pèse $1^{gr}.3$ à la température de 0° et sous la pression $0^{m},76$. On demande quel est le poids d'un litre de ce gaz sous la pression $1^{m}.46$, la température étant la même.

Le poids d'un volume de gaz étant proportionnel à la pression que ce gaz supporte, on aura:

$$\frac{1,3}{0,76} = \frac{x}{1,46}$$

D'où $$x = \frac{1,46 \times 1,3}{0,76} = 2^{gr},48$$

Problème 97.

Dans un récipient de 3 litres de capacité on fait entrer 1° 2 litres d'hydrogène à la pression de 5 atmosphères; 2°, 4 litres d'acide carbonique à la pression de 4 atmosphères; 3° 3 litres d'azote à la pression de $\frac{1}{2}$ atmosphère. On demande la pression finale du mélange, la température étant supposée constante pendant la durée de l'expérience?

La pression de l'hydrogène sera évidemment:

$$\frac{5 \times 2}{3}$$

Digitized by Google

celle de l'acide carbonique :

$$\frac{4 \times 4}{3}$$

et celle de l'azote :

$$\frac{3}{2 \times 3}$$

La pression du mélange sera égale à la somme des pressions exercées par chaque gaz ; on aura donc :

$$H = \frac{5 \times 2}{3} + \frac{4 \times 4}{3} + \frac{3}{2 \times 3} = 9^{atm.} \frac{1}{6}$$

Problème 98.

Un tube barométrique vertical ab plonge dans une cuvette profonde AB, pleine de mercure ; Ce tube contient de l'air qui occupe une longueur de $0^m,2$ et du mercure dont la hauteur est de $0^m,25$ au dessus du niveau du mercure dans la cuvette. On soulève verticalement le tube de $0^m,30$ et l'on demande ce que deviennent alors la longueur de la colonne d'air et la hauteur de la colonne de mercure ?

Le tube étant soulevé, l'air qu'il contient augmentera le volume et sa force élastique diminuera. — Par suite de cette diminution le mercure s'élèvera dans le tube à une hauteur plus grande que sa hauteur primitive.

Soient h cette hauteur finale de la colonne de mercure et H la pression atmosphérique. La pression primitive de l'air a pour expression : H − 25 ; sa pression finale sera H − h.

La longueur de la colonne d'air primitivement de 20 centimètres, sera égale lorsque le tube aura été soulevé de 30 centimètres à :

20 + 25 + 30 − h = 75 − h, longueur totale du tube

Digitized by Google

au-dessous du niveau du mercure dans la cuve, diminuée de la hauteur h du mercure dans le tube.

Les longueurs de la colonne d'air dans le tube sont proportionnelles aux volumes de cet air et ces volumes sont, d'après la loi de Mariotte, en raison inverse des pressions qu'ils supportent; On aura donc :

$$\frac{20}{75-h} = \frac{H-h}{H-25}$$

et en remplaçant H par sa valeur $0^{m}.76$:

$$\frac{20}{75-h} = \frac{76-h}{76-25}$$

d'où l'on tire :

$$h^2 - 151\,h + 4680 = 0$$

et :

$$h = \frac{151 \pm \sqrt{(151)^2 - 4 \times 4680}}{2}$$

$$= \frac{151 \pm 68,88}{2}$$

La seconde valeur de h qui donne :

$$h = \frac{151 - 68,88}{2}$$

est la seule qui convienne aux données du problème ; elle fournit : $h = 43^{\text{cent.}}.56$, hauteur à laquelle s'élève la colonne de mercure dans le tube.

La longueur de la colonne d'air, dans ces conditions est donc :

$$20 + 25 + 30 - 43,56 = 31^{\text{centim.}}.44.$$

Problème 99

La cloche d'une machine pneumatique renferme 3^{lit} 17 d'air ; un baromètre communiquant avec la partie supérieure de la cloche marque 0° quand celle-ci est en communication avec l'atmosphère (Fig 5) On forme

Digitized by Google

la cloche et on fait jouer la machine ; le mercure s'élève alors dans le baromètre de $0^m,65$. Un second baromètre placé dans l'atmosphère marque $0^m,76$ pendant toute la durée de l'expérience. Quel est le poids de l'air retiré de la cloche et quel est le poids de celui qui reste, la température étant maintenue à 0° pendant l'expérience?

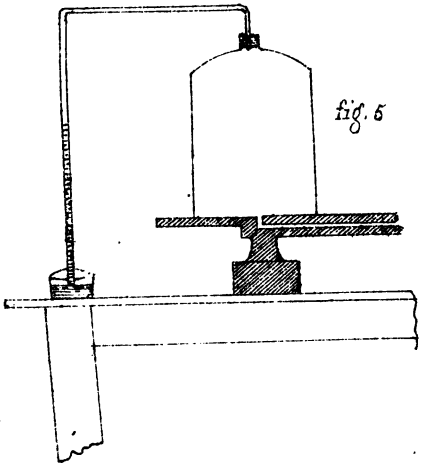


fig. 5

Le poids du litre d'air à $0^m,76$ et à 0° est $1^gr,3$; le poids de l'air contenu primitivement dans la cloche est donc :

$$1^gr,3 \times 3^{lit},17 = 4^gr,121$$

Toujours à 0°, mais sous la pression :

$$0^m,76 - 0^m,65 = 0^m,11.$$

le poids de l'air contenu dans la cloche aura pour expression :

$$1,3 \times 3,17 \times \frac{11}{76} = 0^gr,596$$

Le poids de l'air retiré de la cloche sera donc :

$$4^gr,121 - 0^gr,596 = 3^gr,525$$

Problème 100

Une vessie à parois indéfiniment minces et flexibles renferme 4 litres d'air à 30° sous la pression $0^m,76$. La pression atmosphérique ne changeant pas, on descend la vessie à 100^m de profondeur dans un lac d'eau douce dans la

Digitized by Google

température est de 4°. On demande ce que devien-
dra le volume de la masse gazeuse ?

Une colonne d'eau de 10m.33, au maximum de densité représente une pression d'une atmosphère. Une colonne de 100 mètres équivaudra donc à une pression de $\frac{100}{10,33}$ atmosphères.

La masse gazeuse sera donc soumise à cette profondeur à une pression de $\frac{100}{10,33} = 9,68$ atmosphères, augmentée de la pression atmosphérique ; la pression totale sera donc égale à 10 atm,68.

Le problème prend donc cette forme : On a 4 litres d'air à 30° et à 1 atm de pression ; quel sera le volume à 4° et à une pression de 10 atm 68 ?

0,00367 étant le coefficient de dilatation de l'air, on aura :

$$V = \frac{4(1+0,00367\times 4)}{1+0,00367\times 30} \times \frac{1}{10,68} = 0^{lit},342.$$

Problème 101.

Le volume d'air, dans le manomètre d'une machine de compression (Fig 6) est égal à 152 parties. Par le jeu de la machine, ce volume est réduit à 37 parties et le mercure s'est élevé dans ce tube manométrique à 0m,48. On demande dans quel rapport s'est

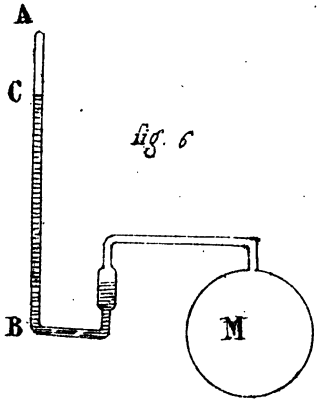


fig. 6

Digitized by Google

accrue la quantité d'air dans le récipient de la machine ?

On a AB (Fig 6) = 152 parties, AC = 37 parties et BC = 0^m48. Cela posé, la pression de l'air en AC est d'après la loi de Mariotte.

$$\frac{152}{37} = 4^{atm},108.$$

Une atmosphère étant égale à une colonne de mercure de 0^m76, pour évaluer cette pression en mètres de mercure on a :

$$H = 4^{atm},108 \times 0^m,76 = 3^m,122.$$

La pression dans le récipient M, où l'on comprime l'air est donc :

$$3^m,122 + 0^m,48 = 3^m,602.$$

D'après la loi de Mariotte la masse d'air primitive à la masse d'air finale est donc comme : 1 est à 4,7 ; Cela revient à dire que la masse d'air est devenue, par la compression 4,7 fois plus grande.

Problème 102.

On verse du mercure dans un tube barométrique en y laissant 15 centim. cubes d'air sec sous la pression extérieure. Le tube est renversé dans une cuvette pleine de mercure. Quand il est vertical, l'air y occupe 25 cent. cubes. La colonne mercurielle qui reste en suspension dans le tube a alors 302 millimètres de hauteur. On demande quelle est la pression extérieure actuelle ?

En désignant par x millimètres cette pression extérieure, l'air renfermé dans la partie supérieure du tube aura une force élastique égale à :

$$\frac{x \times 15}{25}$$

, si l'on ajoute à cette force élastique la hauteur de

la colonne de mercure, 302 m.m. on aura pour somme la pression exercée dans l'intérieur du tube au niveau du mercure de la cuvette, pression égale à la pression atmosphérique actuelle ; soit :

$$\frac{x \times 15}{25} + 302^{m.m} = x$$

d'où :

$$25x = 15x + 25 \times 302$$

$$10x = 7550$$

$$x = 755^{m.m}$$

Problème 103.

Une pompe pneumatique aspirante et foulante puise de l'air dans un récipient dont la capacité est de 20 litres, et l'injecte dans un vase dont la capacité est de 5 litres, le corps de pompe, lorsque le piston est au plus bas de sa course a un volume intérieur égal à 2 litres. Originairement, la pression dans le récipient ainsi que dans le vase est égale à $0^m.75$; le piston dans le corps de pompe est au plus bas de sa course et il ne laisse aucun espace au dessous de lui. — Ceci posé, on donne deux coups de piston et l'on demande ce qui est devenue la pression : 1° dans le récipient ; 2° dans le vase. On suppose la température invariable ?

L'air se répand du récipient dans le corps de pompe, et cet air qui occupait 2 litres, en occupe donc 22 ; sa force élastique qui était $0^m.75$ devient alors :

$$\frac{20}{22} = 0^m.75.$$

On introduit donc dans le vase dont la capacité est 5 litres, 2 litres d'air qui ont pour force élastique $\frac{20}{22} \times 0,75$. Lorsque ces 2 litres occuperont

Digitized by Google

5 litres, leur force élastique sera :

$$\frac{2}{5} \times \frac{20}{22} \times 0,75$$

à laquelle il faut ajouter $0^m,75$, pression de l'air contenu primitivement dans le vase, pour avoir la force élastique de l'air renfermé dans le vase après le premier coup de piston. La force élastique de l'air du récipient égale :

$$\frac{20}{22} \times 0,75 = H$$

celle de l'air du vase égale :

$$0,75 + \frac{2}{5} \times \frac{20}{22} \times 0,75 = H'$$

Les choses se passent de même pour le second coup de piston que pour le premier ; mais il faut remplacer 0,75 par H ce qui donne pour la force élastique du récipient :

$$\frac{20}{22} \times H = \left(\frac{20}{22}\right)^2 \times 0,75 = H''.$$

et pour celle du vase :

$$H' + \frac{2}{5} H'' = 0,75 + \frac{2}{5} \times \frac{20}{22} \times 0,75 + \frac{2}{5} \times \left(\frac{20}{22}\right)^2$$

Après le 1er coup de piston :

Pression dans le récipient	$0^m,6818$
dans le vase	1,0227

Après le second coup de piston :

Pression dans le récipient	$0^m,6199$
dans le vase	1,2706.

Problème 104

Un tube barométrique, plongé dans une cuvette profonde et dressé verticalement renferme de l'air sec dans sa partie supérieure. Le volume de cet air est de 5 centimètres cubes, et la hauteur du mercure dans le tube au-dessus du niveau

dans la cuvette est 588 millimètres. On soulève le tube jusqu'à ce que l'air de la chambre barométrique occupe 4 centimètres cubes. La hauteur du mercure dans le tube est alors de 630 millim; On demande quelle est la pression extérieure ?

Soit x la pression extérieure ; les 3 centim. cubes d'air sont à une pression de :

$$x - 588.$$

A la pression :

$$x - 630.$$

Ce volume deviendrait :

$$\frac{3 \times (x - 588)}{x - 630.}$$

et comme on sait qu'il est alors égal à 4 cent. cub; on est conduit à l'équation :

$$\frac{3(x - 588)}{x - 630} = 4^{c.c.}$$

$$3x - 1764 = 4x - 2520.$$

d'où :

$$x = 2520 - 1764 = 756^{\text{millim.}}$$

Problème 105.

Un récipient ayant un litre de capacité et renfermant de l'air à la pression de $0^m,76$ est ajusté à l'aide d'une monture à robinet à la partie supérieure d'un baromètre à cuvette dont le tube a une longueur de 1 mètre. Cette longueur est comptée à partir du mercure dans la cuvette, lequel est censé invariable. La pression extérieure est de $0^m,77$. On ouvre le robinet qui fait communiquer le récipient et le baromètre, et le mercure de ce dernier s'abaisse de manière à n'être plus qu'à $0^m,60$ du niveau dans la cuvette. On demande quel est le diamètre du

Digitized by Google

tube barométrique. On admet que la température ne change pas pendant l'expérience ?

Soit x le diamètre du tube ; le volume de l'air qui occupait 1 litre à la pression de $0^m,76$ deviendra :

$$1 + \frac{\pi}{4} x^2 \times 5$$

et il sera soumis à la pression :

$$0^m,77 - 0^m,50 = 0^m,27$$

En vertu de la loi de Mariotte, les volumes des gaz étant en raison inverse des pressions qu'ils supportent, nous aurons l'équation :

$$\frac{1 + \frac{\pi}{4} x^2 \times 5}{1} = \frac{0,76}{0,27}$$

d'où :

$$\frac{5}{4} \pi x^2 = \frac{76}{27} - 1 = \frac{49}{27}$$

$$x^2 = \frac{49 \times 4}{27 \times 5\pi}$$

et :

$$x = \sqrt{\frac{49 \times 4}{27 \times 5\pi}} = 6^{cent},798.$$

Problème 106.

La petite branche d'un tube de Mariotte renferme un volume d'air sec de 10 cent. cub. sous la pression de $0^m,76$. Quels seront le volume et la pression de cette masse d'air quand on aura versé par l'ouverture de la longue branche une quantité de mercure égale à 76 centimètres cubes ? On suppose les deux branches verticales, cylindriques et de même diamètre : Chaque centimètre cube de mercure y occupe une longueur de 1 centimètre.

Digitized by Google

D'après les conditions de l'énoncé, nous pouvons représenter par leurs hauteurs les volumes occupés par la masse de gaz et par la quantité de mercure ajouté. Dans ce qui va suivre les nombres exprimeront des longueurs rapportées au centimètre.

Après la première expérience les niveaux dans les branches sont dans un plan horizontal. Soit x l'abaissement du niveau dans la grande branche quand on y verse 76 centim. cubes de mercure, l'élévation du premier niveau dans la petite branche sera aussi égale à x. Donc la différence de niveau après la deuxième expérience sera :

$$76 - 2x$$

La pression supportée par le gaz confiné sera par suite :

$$2 \times 76 - 2x,$$

ou :

$$2(76 - x);$$

D'après la loi de Mariotte on a :

$$2(76 - x) \times (10 - x) = 76 \times 10,$$

et on déterminera x en résolvant l'équation du second degré.

$$x^2 - 86x + 380 = 0$$

On tire de là deux valeurs approchées :

$$x = 43 + 38,340 \ldots\ldots\ldots$$

et

$$x = 43 - 38,340 \ldots\ldots\ldots$$

la première est inadmissible, car la diminution de volume ne peut dépasser le volume total.

Considérons donc la seconde ; désignons par V' et P' le volume de l'air et sa force élastique après la seconde expérience et nous aurons :

$$V' = 5^{\text{cent}},34$$

et

$$P' = 142^{\text{cent}},68.$$

Digitized by Google

Problème 107

Un tube barométrique qui contient de l'air sec dans sa partie supérieure est plongé verticalement dans une cuvette profonde. Cet air a un volume de 3 centimètres cubes et la hauteur du mercure dans le tube, au-dessus du niveau dans la cuvette est égale à 588 millimètres. On soulève le tube jusqu'à ce que l'air occupe un volume de 4 centimètres cubes. La hauteur du mercure dans le tube au-dessus du niveau dans la cuvette est alors 630 millimètres. On demande quelle est la pression extérieure?

Dans la seconde expérience, le volume de l'air devient égal aux $\frac{4}{3}$ du volume primitif, sa force élastique ayant changé en sens inverse sera devenue $\frac{3}{4}$ de la force élastique primitive.

Mais le mercure s'est élevé de:

$$630^{m.m} - 588^{m.m} = 42^{m.m}$$

quantité qui a compensé la diminution de la force élastique, qui est de $\frac{1}{4}$.

Le $\frac{1}{4}$ de la force élastique primitive de l'air est donc égal à $42^{m.m}$.

La pression primitive totale était donc:

$$42^{m.m} \times 4 = 168^{m.m}$$

et la pression atmosphérique était par conséquent:

$$588^{m.m} + 168^{m.m} = 756^{m.m}$$

Problème 108.

Un ballon contenant de l'air ayant une force élastique de $0^m.77$ est ajusté à la partie supérieure d'un tube barométrique au moyen d'une monture à robinet. La longueur du tube au dessus du niveau de la cuvette est de $0^m.90$ et il présente

Digitized by Google

intérieurement une section de 20 cent. carrés. Quand on ouvre le robinet, le mercure descend dans le baromètre et s'arrête à 0m.40 au dessus du niveau dans la cuvette. Quel est le volume intérieur du ballon ? La pression extérieure est de 0m.75 et la température ne varie pas.

Soit V la capacité du ballon ; la masse d'air contenue primitivement dans le ballon occupe le volume V sous la pression 0m.77. Quand le robinet est ouvert, cette masse d'air occupe un volume représenté par :

$$V + (90-40) \times 20.$$

sous la pression :

$$75 - 40 = 35 \text{ cent. m}$$

en transformant toutes les données en centimètres. On a donc, d'après la loi de Mariotte

$$35 \times (V + 20 \times 50) = 77 V$$

en effectuant les calculs on trouve :

$$42 x = 35{,}000$$

Et

$$x = \frac{35.000}{42} = 833 \text{ cent. m. cuber}$$

Problème 109.

Le volume d'air de l'éprouvette d'une machine à compression est de 50 parties à la pression extérieure de 0m.77 ; On donne un certain nombre de coups de piston ; l'air de l'éprouvette n'occupe plus alors qu'un volume de 5 parties et le mercure s'y est élevé à une hauteur de 0m.15. Le volume du récipient est de 5 litres et la température reste invariable à 0° pendant toute la durée de l'expérience. On demande quelle est la quantité d'air qu'on a introduit dans le récipient ?

Digitized by Google

Le poids du litre d'air est : $1^{gr}.293$.

La pression finale supportée par la quantité d'air cherchée est

$$0^{m},77 \times \frac{50}{5} + 0^{m},15 = 7^{m},85$$

Conformément à la loi de Mariotte, la quantité d'air finale est à la quantité primitive comme

$7^{m}.85$ est à $0^{m}.77$

C'est-à-dire qu'elle est :

$$\frac{7,85}{0,77} = 10,194 \text{ fois plus grande.}$$

Cette quantité d'air primitive occupait 5 litres à la pression $0^{m}.77$. A la pression $0^{m}.76$ elle eut occupé :

$$\frac{0,77}{0,76} \times 5$$

La masse d'air finale est donc

$$10,194 \times \frac{0,77}{0,76} \times 5$$

à la pression $0^{m}.76$.

Le volume est exprimé en litres, le litre d'air pesant à la pression $0^{m}.76$ $1^{gr}.293$, le poids de la quantité totale d'air contenue finalement dans le récipient est :

$$10,194 \times \frac{0,77}{0,76} \times 5 \times 1,293.$$

Le poids de l'air qu'il contenait primitivement est :

$$\frac{0,77}{0,76} \times 5 \times 1,293.$$

En retranchant cette seconde quantité de la première, il reste pour le poids de l'air introduit

$$(10,194 - 1)\ \frac{0,77}{0,76} \times 5 \times 1,293$$

Digitized by Google

$$= 9.194 \times \frac{0.77}{0.76} \times 5 \times 1.293 = 60^{gr}.2215.$$

Problème 110.

Un ballon à robinet est plein d'air sous la pression barométrique extérieure H. On fait un vide partiel dans ce ballon jusqu'à ce que la force élastique de l'air soit devenue h; ensuite on y fait entrer de l'hydrogène jusqu'à ce que la pression primitive H soit rétablie. On fait de nouveau un vide partiel jusqu'à ce que la force élastique du mélange gazeux soit redevenue h et on fait une seconde fois rentrer de l'hydrogène jusqu'à ce que la pression H soit rétablie. Cette dernière expérience étant terminée, le mélange contenu dans le ballon est formé de telle sorte que le poids de l'hydrogène est 1000 fois plus considérable que le poids de l'air. La pression extérieure indiqué par le baromètre est $0^m.75$ et la température est constante. La densité de l'hydrogène est 0,0691, celle de l'air étant prise pour unité. On demande de calculer la pression h?

Après la première opération, la force élastique de l'air renfermé dans le ballon reste égale à h.

A la fin de la seconde opération, la force élastique de l'air du ballon se trouve réduite à :

$$h \times \frac{h}{75} = \frac{h^2}{75}$$

La force élastique de l'hydrogène, après la seconde opération est égale à :

$$H - \frac{h^2}{75}$$

$$= 75 - \frac{h^2}{75} = \frac{75^2 - h^2}{75}$$

et le rapport entre la force élastique de l'air et celle

de l'hydrogène est :

$$\frac{75^2 - h^2}{h^2}$$

Si les deux gaz avaient des densités égales ce rapport serait égal au rapport de leurs poids ; mais comme la densité de l'air est à celle de l'hydrogène comme 1 : 0,0691, pour avoir le rapport des poids des deux gaz il faut multiplier le rapport précédent par 0,0691, ce qui donne :

$$\frac{75^2 - h^2}{h^2} \times 0,0691 = 1000$$

D'où

$$h^2 (1000 + 0,0691) = 75^2 \times 0,0691$$

$$h^2 = \frac{75^2 \times 0,0691}{1000 \times 0,0691}$$

$$h = \sqrt{\frac{75^2 \times 0,0691}{1000 + 0,0691}} = 6^{\text{millim}}.2$$

Problème 111.

On a comprimé de l'air dans un réservoir muni d'un robinet. La capacité de ce réservoir est de 1 déc. cub. et l'air qui y est comprimé est à la pression $6^m,08$. On ouvre le robinet de manière qu'il en sorte une quantité de gaz occupant 2 litres à la pression $0^m,78$ et on referme le robinet. On demande à quelle pression se trouve l'air restant dans le récipient ?

La quantité d'air qu'on a laissé sortir, occupant 2 litres à la pression $0^m,78$, occuperait à la pression $0^m,76$ un volume de :

$$2 \times \frac{0,78}{0,76} \text{ litres}$$

L'air contenu primitivement dans le récipient, occupant 1 litre à la pression $6^m,08$, occuperait à la

Digitized by Google

pression $0^m,76$ un volume de :

$$1 \times \frac{6,08}{0,76} = 8 \text{ litres}$$

La quantité d'air restant occuperait donc à $0^m,76$ un volume de

$$8^{lit.} - 2 \times \frac{78}{76} \text{ lit.} = 5^{lit.},947.$$

Mais le volume de cet air étant 1 litre, sa pression sera, d'après la loi de Mariotte :

$$0^m,76 \times 5^{lit.},947 = 4^m,520$$

Problème 112.

On a fait le vide dans un ballon ayant une capacité de 40 litres et on y a introduit successivement :

1° 4 litres d'azote à la pression de $0^m,80$
2° 5 litres d'oxygène à la pression $0^m,74$
3° 8 litres d'hydrogène à la pression $0^m,70$

Quelle sera la pression du mélange gazeux dans le ballon ?

Les 4 litres d'azote, occupant 40 litres, leur pression deviendra

$$H = \frac{40 \times 0^m,80}{4} = 0^m,0800$$

pour l'oxygène on aura :

$$H' = \frac{40 \times 0^m,74}{5} = 0^m,0925$$

pour l'hydrogène :

$$H'' \quad \frac{40 \times 0^m,70}{8} = 0^m,14$$

Enfin la pression finale du mélange sera :

$$H + H' + H'' = 0^m,0800 + 0^m,0925 + 0^m,1400 = 0^m,3125$$

Digitized by Google

Problème 113.

Un ballon muni d'un robinet contient 5 litres d'air à la pression $0^m,78$. On fait communiquer ce ballon avec un flacon de Mariotte qui contient du mercure et dans lequel la pression qui détermine l'écoulement est égale à $0^m,20$ de mercure. On demande ce que deviendront la force élastique et le volume de l'air qui restera dans le ballon. La pression extérieure est de $0^m,76$?

Appelons V le volume du mercure écoulé; le volume de l'air restant dans le ballon se trouvera réduit à la fin de l'opération à un volume de :

$$5000^{c.c.} - V$$

V étant exprimé en centimètres cubes.

La force élastique de cet air primitivement de 0,78, deviendra :

$$\frac{5000}{5000-V} \times 0,78$$

Puisque cette force élastique fait équilibre à la pression extérieure $0^m,76$ plus à la colonne de mercure de $0^m,20$ de hauteur, elle doit être égale à la somme de ces deux pressions.

On aura donc :

$$\frac{5000}{5000V} \times 0^m,78 = 0^m,76 + 0^m,20$$

D'où :

$$0,76V + 0,20V = 0,76 \times 5000 + 0,20 \times 5000 - 0,78 \times 5000$$

d'où l'on tire en effectuant :

$$V = 937^{c.c.}.5$$

Le volume de l'air du ballon est donc devenu

$$5000^{c.c.} - 937^{c.c.},5 = 4062^{c.c.},5$$

Digitized by Google

et sa force élastique d'après la loi de Mariotte sera égale à :

$$0,78 \times \frac{5000}{4062,5} = 0^{m},96$$

Problème 114.

Un ballon, muni d'une monture à robinet contient de l'air à la pression $0^{m},77$. On l'ajuste à la partie supérieure d'un baromètre à cuvette dont le tube a une longueur de $0^{m},90$ au dessus du niveau dans la cuvette et dont la section est de 2 centim carr. On ouvre le robinet ; le mercure s'abaisse dans le tube jusqu'à ce qu'il ne soit plus qu'à une hauteur de $0^{m},10$ au dessus du niveau dans la cuvette. La pression extérieure est $0^{m},76$ et la température invariable. Calculer la capacité du ballon ?

Appelons V la capacité du ballon exprimée en centimètres cubes. Quand le robinet est fermé, le volume de l'air est V à la pression $0^{m},77$. Lorsque le robinet est ouvert, le volume de l'air devient :

$$V + 2 \times (90 - 10) = V + 160^{c.c.}$$

et la pression est évidemment :

$$0^{m},76 - 0^{m},10 = 0^{m},66$$

D'après la loi de Mariotte, le produit des volumes par les pressions correspondantes est constant pour une même masse gazeuse.

$$V \times 0^{m},77 = (V + 160)\ 0^{m},66$$

$$V \times 0,77 = V \times 0,66 + 160 \times 0,66$$

$$V(0,77 - 0,66) = 160 \times 0,66$$

$$V = \frac{160 \times 0,66}{0,77 - 0,66} = 960^{c.\,cub.}$$

Digitized by Google

Problème 115.

La chambre barométrique d'un baromètre à cuvette contient une quantité inconnue d'air. Dans une première observation, la hauteur de la colonne mercurielle est 748 m.m et la longueur de la chambre barométrique 122 m.m. Dans une seconde observation, la hauteur du mercure est 750 m.m et la longueur de la chambre barométrique 141 m.m. On demande de calculer la pression atmosphérique au moment de l'expérience?

Appelons H cette pression cherchée; le volume de l'air dans le tube peut se représenter par la longueur qu'il occupe est dans la première observation 122 m.m et sa force élastique H − 748.

Dans la seconde observation cet air occupe un volume représenté par 141 m.m et sa force élastique est devenue H − 750.

D'après la loi de Mariotte, les produits des volumes de la masse gazeuse par les pressions correspondantes son égales, on aura donc :

$$(H-748)\,122 = (H-750)\,141$$

d'où :

$$122\,H - 748\times 122 = 141\,H - 750\times 141$$

et

$$H\,(141-122) = 750\times 141 - 748\times 122$$

$$H = \frac{750\times 141 - 748\times 122}{141-122}$$

D'où enfin :

$$H = 762^{m.m}.8$$

Digitized by Google

Problème 116.

Un manomètre (fig. 7) est divisé en 110 parties d'égale capacité. Quand la pression extérieure est $0^m,76$, le mercure se tient au 0 de l'échelle dans l'intérieur de l'éprouvette et dans la boule P'. On adapte ce manomètre à une machine dans laquelle on comprime l'air et l'on voit le mercure s'élever jusqu'à la division 80. Enfin on mesure la hauteur du mercure dans le tube et on la trouve égale à $0^m,45$. On demande la pression dans la machine ?

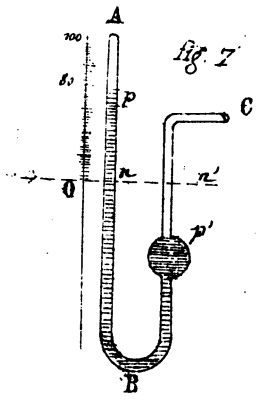


fig. 7

Pour avoir la pression P de l'air comprimé en A p, nous servirons de l'égalité :

$$\frac{0,76}{P} = \frac{30}{110}$$

d'où :

$$P = 2^m,786$$

La pression de l'air contenu dans le récipient est évidemment égale à cette pression P augmentée de la pression exercée par la colonne mercurielle, laquelle est de $0^m,45$. Nous aurons donc pour pression de l'air dans la machine à compression :

$$2^m,786 + 0^m,45 = 3^m,236$$

pression exprimée en hauteur de mercure.

Pour exprimer cette pression en atmosphères, il suffit de diviser cette hauteur par $0^m,76$; on obtient ainsi :

$$\frac{3,236}{0,76} = 4^{atm},25$$

Digitized by Google

Problème 117.

La capacité de chacun des deux corps de pompe d'une machine pneumatique est égale au cinquième de la capacité du récipient dans lequel on veut faire le vide. On demande quelle sera la force élastique de l'air qui restera dans le récipient après 10 coups de piston, en supposant que cette force élastique soit d'abord égale à $0^m.76$ et que la température soit invariable?

Il est évident que chaque coup de piston enlève $\frac{1}{6}$ de la quantité d'air que contient le récipient. Or les $\frac{5}{6}$ qui restent occupent toujours le même volume, leur force élastique sera égale aux $\frac{5}{6}$ de ce qu'elle était avant le coup de piston. Donc les forces élastiques varieront comme les termes d'une progression par quotient dont le premier terme est $0^m.76$ et la raison $\frac{5}{6}$; de sorte qu'après 10 coups de piston, la force élastique sera:

$$F = 760^{m.m} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$$

En effectuant on trouve:

$$F = 122^{m.m}.744$$

Problème 118.

Une cloche pleine de mercure (fig. 8) est renversée sur une cuvette contenant également du mercure. Le rayon intérieur de la base de cette cloche est de $0^m.05$ et sa hauteur $0^m.42$. On demande quelle force il faut employer pour soulever cette cloche, sachant que la pression atmosphérique actuelle est de $0^m.75$.

Appelons R le rayon de la cloche, D la densité du mercure, et cherchons à représenter en grammes la pression que l'atmosphère exerce de haut en bas extérieurement, sur le fond de la cloche.

Digitized by Google

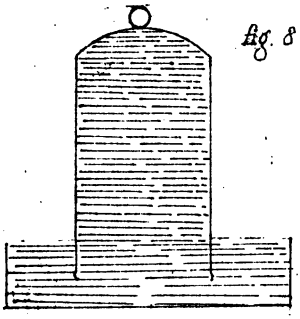


Fig. 8

La base de la cloche a pour expression :

$$\pi R^2.$$

La pression en grammes qu'exerce l'atmosphère sur chaque centimètre carré est :

$$D \times 75$$

Celle exercée sur le fond de la cloche est donc :

$$\pi . R^2 . D . 75.$$

qui, exprimée en chiffres est :

$$3,1416 \times 25 \times 13,596 \times 75$$

La pression à l'intérieur de la cloche, qui s'exerce de bas en haut est égale à la pression atmosphérique diminuée de la pression due à la hauteur du mercure dans la cloche, soit :

$$75 - 42 = 33 \text{ cent. m.}$$

Cette pression exprimée en grammes, est :

$$\pi . R^2 . D . 33$$

$$= 3,1416 \times 25 \times 13,596 \times 33$$

La force nécessaire pour soulever la cloche sera évidemment égale à la différence de ces deux pressions dont l'une s'exerce de haut en bas et l'autre de bas en haut.

$$F = 13,596 \times 3,1416 \times 25 \times 42 = 44^{K},848^{g}.$$

Problème 119.

Mesure des hauteurs par le Baromètre.

Formule de Laplace — Formule de M. Babinet.

Désignons par D la différence de hauteur, c'est-

à dire la distance verticale de deux endroits de la terre, T et t les températures à ces deux stations, H et h les hauteurs barométriques correspondantes, ramenées à zéro; l'illustre Laplace a donné la formule:

$$D = 18393^{m} \left[1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right] (L.H - L.h)$$

L.H et L.h désignant les logarithmes de H et h. Pour plus d'exactitude il faudrait tenir compte des latitudes des deux stations, mais le facteur qui en dépend étant très près de l'unité se néglige ordinairement.

M. Babinet a modifié la formule de Laplace (1). On peut s'en servir pour les hauteurs moindres que 1000^{m}, elle présente en outre cet avantage qu'on peut effectuer les calculs sans employer les tables de logarithmes.

Désignons par M le module connu qui est égal, comme on le sait, à 0,43429 .... On sait que:

$$L.H - L.h = L.\frac{H}{h} = M\, l.\frac{H}{h}$$

Le signe l désigne ici les logarithmes hyperboliques.

Posons maintenant:

$$H + h = s, \quad H - h = d,$$

on conclut de là:

$$H = \frac{s+d}{2}, \quad h = \frac{s-d}{2}$$

par suite:

$$l\,\frac{H}{h} = l\,\frac{s+d}{s-d}$$

ou bien:

$$l\,\frac{H}{h} = l\,\frac{1+\frac{d}{s}}{1-\frac{d}{s}} = l\left(1+\frac{d}{s}\right) - l\left(1-\frac{d}{s}\right)$$

---

(1) Voy. Babinet et Houzel, calculs pratiques appliqués aux sciences d'Observation.

Digitized by Google

Mais au moyen des formules approchées on a :

$$l\left(1+\frac{d}{5}\right)=\frac{d}{5}\ ;\ l\left(1-\frac{d}{5}\right)=-\frac{d}{5}$$

d'où enfin :

$$l\,\frac{1+\frac{d}{5}}{1-\frac{d}{5}}=2\,\frac{d}{5}$$

On aura donc :

$$L.H-L.h=2M.\,\frac{H-h}{H+h}$$

ce qui donne :

$$D=18393.2M\left(\frac{H-h}{H+h}\right)\left[1+\frac{2(T+t)}{1000}\right]$$

Le produit 18393.2 M est égal à peu près au nombre 15976 ou en nombre rond 16000, on aura la formule simplifiée :

$$D=16000^{m}\left[1+\frac{2(T+t)}{1000}\right]\left(\frac{H-h}{H+h}\right)$$

Problème 120.

Cette formule comme nous l'avons dit plus haut, convient pour les hauteurs inférieures à 1000m à cause de la petitesse de H-h. On a pris le nombre 16000 au lieu du nombre 15976 pour augmenter la valeur de qui avait été diminuée en ne conservant que le premier terme de la série :

$$l\,\frac{1+\frac{d}{5}}{1-\frac{d}{5}}=2\left[\frac{d}{5}+\frac{1}{3}\left(\frac{d}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{d}{5}\right)^5+\ldots\ldots\right]$$

Comparons maintenant le résultat obtenu par la formule simplifiée et celle de Laplace. Prenons l'exemple donné par M. Babinet dans l'ouvrage cité plus haut, supposons $T=18^{\circ}$; $t=12^{\circ}$

$H=0,76$; $h=0,70$

Digitized by Google

Remplaçant les lettres par leurs valeurs la formule de Ch. Babinet devient :

$$D = 16000^{m}\left[1 + \frac{2,30}{1000}\right] \times \frac{0,06}{1,46}$$

en effectuant on trouve :

$$D = 696^{m}.98.$$

La formule de Laplace, appliquée aux mêmes données donne :

$$D = 696^{m}.33.$$

L'accord est, comme on le voit, bien suffisant. Quelle soit d'ailleurs la formule employée, on comprend que l'expérience est trop délicate par elle, même pour donner les hauteurs à un mètre près.

Digitized by Google

Deuxième Partie.

Problèmes sur la Chaleur.

Dilatation des solides et des liquides — Corrections Barométriques. Thermométrie

Problème 121.

On a un carré de tôle de 3^m de côté à 0°; on porte la température à 64°. Calculer ce que devient la surface, le coefficient de dilatation linéaire de fer étant 0,0000122 ?

Soit a le côté du carré donné, a' ce que devient ce côté en passant de 0° à 64°. On aura pour trouver a' :

$$a' = a(1 + Kt)$$

d'où :

$$a' = 3(1 + 0,0000122 \times 64) = 3^m,0023424.$$

La surface dont a' est le côté étant a'^2, on aura pour la surface demandée :

$$a'^2 = (3^m,0023424)^2 = 9^{m.c.}01,41$$

Problème 122.

Le coefficient de dilatation linéaire du fer étant 0,0000122, on demande quelle sera à 60° la surface d'un disque circulaire de tôle qui à 0°

Digitized by Google

a $2^m,75$ de diamètre ?

Soit S la surface cherchée, K le coefficient de dilatation ;

On aura :

$$S = \pi R^2 (1+Kt)^2$$

D'où

$$S = 3,1416 \times (1^m,375)^2 (1+0,000\,122 \times 60)^2$$

En effectuant les calculs on trouve :

$$S = 5^{m.c},9483.$$

Problème 123.

Une barre de 7^m formée par un métal dont le coefficient de dilatation linéaire est $\frac{1}{735}$ se dilate en longueur autant qu'une autre barre de 9^m d'un autre métal. On demande le coefficient de dilatation de cet autre métal ?

Représentant par K le coefficient de dilatation de ce dernier métal, on aura :

$$K \times 9 = 7 \times \frac{1}{735}$$

en effectuant le calcul on trouve que le coefficient cherché est :

$$\frac{1}{945}$$

Problème 124.

Une barre formée d'un métal dont le coefficient de dilatation linéaire est $\frac{1}{754}$ a 2^m de longueur. On demande quelle longueur on devrait donner à une barre d'un autre métal dont le coefficient de dilatation est $\frac{1}{1150}$, pour que sa dilatation totale, pour 1 degré, soit égale à celle

Digitized by Google

de la première barre ?

Si l'on exprime par l la longueur de la seconde barre, on aura l'égalité :

$$l \times \frac{1}{1150} = 2 \times \frac{1}{754}$$

d'où l'on tire la valeur de l qui est :

$$3^{m}.050$$

Problème 125.

Le coefficient de dilatation linéaire du cuivre étant $\frac{1}{58.400}$ et celui du platine $\frac{1}{116.700}$: On demande quelle différence il y aura à la température de 100° entre les longueurs de deux barres, l'une de cuivre, l'autre de platine, qui, à 20° ont chacune 3^{m} de longueur ?

Pour 80° d'augmentation de température (100° – 20°), la barre de cuivre augmente de longueur de :

$$3 \times \frac{1}{58,400} \times 80$$

et celle de platine de :

$$3 \times \frac{1}{116,700} \times 80$$

La différence de longueur des barres à 100° est égale à la différence de ces allongements.

Soit :

$$3 \times 80\left(\frac{1}{58,400} - \frac{1}{116,700}\right) = 0^{m},002053.$$

Problème 126.

On demande de combien s'allonge, en passant de – 15° à + 30° un fil de fer de 170 kilomètres de long ; le coefficient de dilatation du

Digitized by Google

fer est :

$$\frac{1}{81,900}$$

Le fil en passant de -15 à $+30°$ subit un accroissement de temp. de $45°$.

Son allongement pour $1°$ étant :

$$\frac{170,000^m}{81,900} = \frac{1700}{819}.$$

son allongement pour $45°$ sera

$$\frac{45 \times 1700}{819} = 93^m,40$$

Problème 127.

Deux règles, l'une de cuivre, l'autre de platine, ont la forme de prismes droits à base rectangle ; à $0°$ elles sont parfaitement égales. Leur longueur commune est de $1^m,25$. On sait que le coefficient de dilatation linéaire du cuivre est $\frac{1}{53,500}$; celui du platine est : $\frac{1}{116,100}$. On demande : 1° quelle sera à $100°$ la différence de longueur de ces règles, 2° quel sera, toujours à $100°$, le rapport des surfaces de leur section droite ?

1° La règle de cuivre aura pour longueur à $100°$

$$1,25\left(1 + \frac{100}{53,500}\right)$$

et celle du platine :

$$1,25\left(1 + \frac{100}{116,100}\right)$$

en retranchant la seconde de ces quantités de la première on aura :

$$1,25\left(\frac{1}{535} - \frac{1}{1161}\right) = \frac{1,25(1161 - 535)}{535 \times 1161} = 0,00124$$

2° La surface de la section droite de la règle

Digitized by Google

de cuivre, si nous désignons par a et b ses deux dimensions à 0°, deviendra à 100°.

$$ab\left(1+\frac{100}{53,500}\right)^2$$

la surface de la section de la règle de platine sera à 100° :

$$ab\left(1+\frac{100}{1161}\right)^2$$

le rapport de ces deux surfaces égalera donc :

$$\frac{\overline{532}^2 \times \overline{1161}^2}{\overline{1162}^2 \times \overline{535}^2} = 1,00201.$$

Problème 128.

Les rapports entre les poids spécifiques du cuivre à 0° et celui de l'eau à 4° est 8,88. Le coefficient de dilatation cubique de cuivre étant $\frac{1}{58,200}$ et la fraction qui représente la dilatation de l'eau entre 4° et 15° est $\frac{1}{1360}$. Cela posé on demande quel est à 15° le rapport des poids spécifiques de ces deux corps ?

L'eau pesant 1 à 4°, pèse à 15° $\times \frac{1}{1+\frac{11}{1360}}$

à 0° le cuivre pèse 8,88 ; à 15°, il pèse :

$$\frac{8,88}{1+\frac{15}{58,200}}$$

Donc le poids spécifique du cuivre à 15° est :

$$\frac{8,88}{1+\frac{15}{58,200}} : \frac{1}{1+\frac{11}{1360}} = \frac{8,88 \times 58,200}{58,215} \times \frac{1371}{1360}$$

Ce qui donne :

D à 15° = 8,94

Digitized by Google

Problème 129.

Sachant que la densité du cuivre est 8,8 et que le coefficient de dilatation cubique de ce métal est $\frac{1}{19.500}$ On demande ce que pèsera à 50 une sphère de ce métal de 1m de rayon ?

Le volume de cuivre est donné par la formule $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ et, comme la valeur de R^3 est ici l'unité, nous n'aurons besoin que de $\frac{4}{3} \pi$ pour exprimer le volume en mètres cubes. Cherchons maintenant la densité du cuivre à 50°, il viendra :

$$d = \frac{8,8}{1 + \frac{1}{19,500} \times 50} = 8,8 \times \frac{390}{391}$$

Le poids demandé sera d'après la formule :

$$P = VD \quad , \quad \frac{4}{3} \pi \times 8,8 \times \frac{390}{391} = 110301^{K},2$$

Problème 130.

Un vase en verre contient 124 cent. cubes d'eau pure à 0° qui le remplissent. On le chauffe à 100°. Il laisse échapper progressivement 6 c.c. d'eau. Quelle est la dilatation absolue de l'unité de volume d'eau de 0° à 100° ? (La dilatation cubique du verre = 0,000026 pour chaque degré)

Soit x le coefficient de dilatation absolue de l'eau, V le volume à 0°; à 100° ce volume sera : $V(1+x)$ et il égalera le volume du vase plus le volume V' de l'eau sortie du vase :

$$V(1 + 0,000026 \times 100) + V'$$

or : $V = 124^{c.c}$, $V' = 6^{c.c.}$

Nous aurons :

$$124\,(1+x) = 124 \times 1,0026 + 6$$

Digitized by Google

$$124\,x = 6,3224\ ;\ x = \frac{6,3224}{124} = 0,050987.$$

Problème 131.

Un vase de verre renferme à 0° un morceau de fer du poids de 100 gr. et en outre 120 gr. de mercure. Il est complètement plein. On chauffe à 100° et on demande quel est le poids du mercure qui sort. La densité du fer à 0° est 7,78; son coefficient de dilatation cubique est $\frac{1}{28.700}$; la densité du mercure à 0° est 13,59, son coefficient de dilatation $\frac{1}{5550}$. Le coefficient de dilatation cubique du verre est $\frac{1}{38,700}$?

Désignons par V, V', V'' les volumes du vase de verre, du fer et du mercure à 0°, nous aurons :

$V = V' + V''$ à la temp. de 0°

à 100° V deviendra : $V\left(1 + \frac{100}{38,700}\right)$

V' deviendra : $V'\left(1 + \frac{100}{28,700}\right)$

V'' deviendra : $V''\left(1 + \frac{100}{5,550}\right)$

Pour connaître le volume x du mercure sorti de l'appareil, il suffit de retrancher de la somme des volumes du fer et du mercure à 100°, le volume du vase à cette température, ce qui donne :

$$x = V'\left(1 + \frac{100}{28,700}\right) + V''\left(1 + \frac{100}{5,550}\right) - V\left(1 + \frac{100}{38,700}\right)$$

Remplaçant V par sa valeur $V' + V''$ on aura :

$$x = \frac{V'}{287} + \frac{10V''}{555} - \frac{V' + V''}{387}$$

Or la formule $P = VD$ donne :

$$V' = \frac{100}{7,78}\ ;\ V'' = \frac{120}{13,59}$$

Digitized by Google

en substituant les valeurs on a :

$$x = \frac{100}{287 \times 7,78} + \frac{1200}{555 \times 13,59} - \frac{1}{387}$$

$$\left(\frac{100}{7,78} + \frac{120}{13,59}\right)$$

Pour avoir le poids du mercure sorti, il faut multiplier le volume x par la densité du mercure à 100°, qui sera :

$$\frac{13,59}{1+\frac{100}{5550}} = \frac{13,59 \times 555}{565};$$

ce qui donne pour le poids du mercure sorti :

$$P = \frac{13,59 \times 555}{287 \times 7,78 \times 565} + \frac{1200}{565} - \frac{13,59 \times 555}{387 \times 7,78 \times 565} -$$

$$- \frac{120 \times 555}{387 \times 565}$$

$$= \frac{13,59 \times 555}{7,78 \times 565}\left(\frac{1}{287} - \frac{1}{387}\right) + \frac{120}{565}\left(10 - \frac{555}{387}\right)$$

$$= \frac{13,59 \times 555}{7,78 \times 565} \times \frac{100}{287 \times 387} + \frac{120}{565} \times \frac{3315}{387} = 1^{gr},974$$

Problème 132.

Une sphère de cuivre dont le rayon est à 0° $0^{m},2651$ est portée dans une enceinte chaude jusqu'à ce que son rayon devienne $0^{m},2657$. On demande quelle est la température de cette enceinte, sachant que le coefficient de dilatation cubique du cuivre est $\frac{1}{19,400}$?

Soit a le rayon à 0° et a' le rayon à la température cherchée ; nous aurons, pour exprimer le volume à 0° et à x°

Digitized by Google

$$V = \frac{4}{3}\pi a^3$$
$$V' = \frac{4}{3}\pi a'^3 \quad ; \quad V' = V(1+Kx)$$

D'où :

$$\frac{4}{3}\pi a^3 (1+Kx) = \frac{4}{3}\pi a'^3$$
$$a^3 + a^3 K x = a'^3$$
$$x = \frac{a'^3 - a^3}{a^3 K}$$

En effectuant les calculs, on trouve :

$$x = 132°,03.$$

Problème 133.

Ce problème peut encore se résoudre d'une manière approchée en considérant que le coefficient de dilatation linéaire est très-sensiblement $\frac{1}{3}$ du coefficient de dilatation cubique.

On a alors :

$$R_x = R_0 (1 + \delta x)$$
$$x = \frac{R_x - R_0}{R_0 \delta}$$
$$= \frac{0,2657 - 0,2651}{0,2651 \times \frac{1}{3 \times 19,400}}$$

On trouve : $x = 131°,72$

Problème 134.

Un cône en cuivre a une hauteur de $0^m,25$ et un rayon de $0^m,15$ à $0°$. On le chauffe à $180°$ et l'on demande ce que deviennent la hauteur et le rayon à cette température, sachant que le coefficient de dilatation cubique du cuivre est : $\frac{1}{19,400}$.

Digitized by Google

Le volume du cône est :

$$\pi r^2 \frac{h}{3}$$

$$V_0 = \frac{3,14159 \times (0,15)^2 \times 0,25}{3} = 0^{m.c}, 005890481$$

A 180° on a :

$$V_t = V_0 (1+Kt) = 0^{m.c}, 005890481 \left(1+\frac{180}{19\,400}\right)$$

$$V_t = 0,005945513$$

Le cône restant semblable à lui-même à toute température, on a :

$$\frac{V_0}{V_t} = \frac{r^3}{r_t^3} = \frac{h_0^3}{h_t^3}$$

$$r_t = \sqrt[3]{\frac{V_t\, r_0^3}{V_0}} = 0^m, 15\,0463$$

$$h_t = \sqrt[3]{\frac{V_t\, h_0^3}{V_0}} = 0,250771$$

Problème 135.

Le poids spécifique du cuivre à 0° est 8.878, son coefficient de dilatation cubique $\frac{1}{19\,400}$; le poids spécifique de l'eau à 15° est 0,991. On demande quelle perte de poids éprouvera par son immersion dans l'eau à 15° un morceau de cuivre pesant 496 gr. ?

Densité du cuivre à 15° :

$$= \frac{8,878}{1+\frac{15}{19,400}} = \frac{8,878 \times 19,400}{19,415} = 8,8711$$

Volume des 496 gr. à 15° :

$$= \frac{496}{8,8711} = 55^{\text{cent cub}}, 912$$

Digitized by Google

poids de l'eau déplacée $55^{cc},912 \times 0,991$ qui représente la perte du poids du cuivre $= 55^{gr},4088$.

Problème 136.

Un réservoir en verre contient à 0° 55gr de mercure ; à 120° il n'en contient plus que 54gr. La densité du mercure à 0° est 13.598, son coefficient de dilatation est $\frac{1}{5550}$. On demande le coefficient de dilatation de l'enveloppe.

Soient V_0, D_0 et P le volume, la densité et le poids à 0° :

V_t, D_t et P' le volume, la densité et le poids à 120°.

K le coefficient de l'enveloppe, δ celui du mercure.

On aura :

$$V_t = V_0 (1 + Kt)$$

$$V_t = \frac{P'}{D_t} \; ; \; D_t = \frac{D_0}{1+\delta t} \; ; \; V_0 = \frac{P}{D_0}$$

D'où :

$$\frac{P'(1+\delta t)}{D_0} = \frac{P(1+Kt)}{D_0} \; ; \; Kt = \frac{P'(1+\delta t) - P}{P}$$

$$K = \frac{P'(1+\delta t) - P}{Pt} = 0,00000\,25389 = \frac{1}{39,387}$$

Problème 137.

Un réservoir de verre thermométrique dont le coefficient de dilatation cubique est $\frac{1}{39,387}$ contient à 0° 55gr de mercure. On porte dans une enceinte chaude jusqu'à ce que ce poids ne soit plus que de 54gr. Quelle est la température de cette enceinte, sachant que le coefficient de dilatation

Digitized by Google

du mercure est : $\frac{1}{5550}$

A 0°. le volume du réservoir est : $\frac{P}{D}$

à x° il est : $\frac{P}{D_0}(1+Kx)$ et $\frac{P'}{D_t} = \frac{P'(1+\delta x)}{D_0}$

On a donc

$$\frac{P}{D_0}(1+Kx) = \frac{P'}{D_0}(1+\delta x)$$

$$P + PKx = P' + P'\delta x \; ; \; P'\delta x - PKx = P - P'$$

$$x(P'\delta - PK) = P - P'$$

$$x = \frac{P-P'}{P'\delta - PK} = \frac{55-54}{54 + \frac{1}{5550} - 55 \times \frac{1}{89387}} = 120°$$

Problème 138.

Un réservoir en verre contient à 0° 138 g. 473 de mercure. On demande quel poids de mercure sortira du réservoir si on porte la température à 150°. Le coefficient de dilatation de verre est $\frac{1}{37000}$; celui du mercure $\frac{1}{5550}$?

Le volume du mercure sorti à 150° sera égal à l'excès du volume total du mercure sur celui de l'enveloppe à cette température :

$$V = V_1(1+\delta t) - V_0(1+Kt)$$

En transformant en poids et remarquant que $D_t = \frac{D_0}{1+\delta t}$

On a :

$$\frac{x(1+\delta t)}{D_0} = \frac{P}{D_0}(1+\delta t) - \frac{P}{D_0}(1+Kt)$$

$$x(1+\delta t) = P\frac{[(1+\delta t)-(1+Kt)]}{1+\delta t}$$

Digitized by Google

$$= \frac{138,473\left[\left(1+\frac{150}{5550}\right)-\left(1+\frac{150}{37,000}\right)\right]}{1+\frac{150}{5550}}$$

En effectuant les calculs on trouve : $x = 3^{gr},1343$

Problème 139.

Une sphère creuse en cuivre a, à 0° un rayon intérieur de $0^{m},045$. Quel poids de mercure peut on y introduire, 1° à 0°, 2° à 65° ; le coefficient de dilatation du cuivre est $\frac{1}{19\,400}$ celui du mercure $\frac{1}{5\,550}$; la densité du mercure est 13,59.

Le volume intérieur de la sphère à 0° est

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times 3,14159 + (0,045)^3\ 0^{m.cub},000381703$$

Le poids du mercure qu'elle peut contenir à cette température est :

$$P = VD = 0^{dec.c.},381703 \times 13,59 = 5^{K},187\,34$$

à 65° ce volume devient :

$$V_t = V_0\,(1+Kt)$$

$$V_t = 0^{dec.cub.},381703\left(1+\frac{65}{19\,400}\right) = 0^{dec.cub.},382\,982$$

d'un autre côté la densité du mercure devient à 65°

$$\frac{D}{1+\delta t} = \frac{13,59 \times 5550}{5,615} = 13,4327$$

le poids du mercure contenu à 65° est donc :

$$V_t\,D_t = 0^{dec.cub.},382\,982 \times 13,4327 = 5^{K},14447$$

Problème 140.

Une sphère creuse de platine, d'un rayon

Digitized by Google

extérieur de $0^m,035$ se tient en équilibre dans le mercure à la température de $0°$. On demande quel sera le poids qui sollicitera la sphère à aller au fond si la température s'élève à $35°$, le coefficient de dilatation K du platine est $\frac{1}{37700}$; celui du mercure $\frac{1}{5550}$ et sa densité 13,59.

Le poids demandé sera égal à la différence du poids de la sphère et du poids du mercure qu'elle déplace.

Ce poids de la sphère est égal au poids d'un égal volume de mercure à $0°$: $P = \frac{4}{3} 3,1416 (0.035)^3 \times 13,59 = 1^K 938,71$. Cherchons maintenant ce que devient à $35°$ le poids du mercure déplacé :
à $35°$ le volume de la sphère sera $\frac{4}{3} \pi r^3 (1+Kt)$ qui, traduit en chiffres, donne $\frac{4}{3} \times 3,1416 (0,035)^3 \left(1 + \frac{35}{37700}\right) = 0^{dec.\ cub}, 142 79$. C'est le volume du mercure déplacé à cette température. Pour trouver son poids P' on a : $\frac{V D_0}{1+\delta t}$; $\frac{D_0}{1+\delta t}$ étant la densité du mercure à $35°$.

On a donc $P' = 0^{dec.\ cub}, 142 79 \times \frac{13,59 \times 5550}{5585} = 1^K, 92835$

le poids de la sphère étant $1^K, 93871$

et celui du mercure déplacé à $35°$ $1, 92835$

On obtient pour différence 0, 01036 qui représente le poids qui sollicite la sphère à aller au fond.

Problème 141.

Trouver la pression en Kilogrammes de l'effort à faire pour soutenir dans le mercure à 30° un morceau de platine dont le poids absolu est de 20 K. La densité du platine à 0° est 22; son coefficient de dilatation $\frac{1}{38700}$, celui du mercure $\frac{1}{5,550}$ et sa densité à 0° 13,59 ?

Digitized by Google

A 0° le volume du mercure serait _, en décimètres cubes $\frac{20}{22}$ à 30° il sera :

$$\frac{20}{22}\left(1+\frac{30}{38700}\right)=\frac{20}{22}\times\frac{38,730}{38700}=\frac{3873}{11\times 387}.$$

Le volume du mercure déplacé sera le même ; mais à 0°, ce mercure occuperait le volume :

$$\frac{3873}{11\times 387}:\left(1+\frac{30}{5550}\right)=\frac{3873\times 555}{11\times 387\times 558};$$

Son poids sera donc en Kilogrammes :

$$\frac{3873\times 555\times 13,59}{11\times 387\times 558}=12^{K},2976$$

En vertu du principe d'Archimède, l'effort à faire est la différence entre le poids du platine et celui du mercure déplacé ou :

$$7^{K},7024.$$

Problème 142.

Un réservoir en verre contient à 0° 138 gr 473 de mercure ; à 150° il n'en contient plus que 135 gr 3755. On demande quel est le coefficient de dilatation de ce réservoir, celui du mercure étant $\frac{1}{5550}$?

A 0° le volume commun du réservoir et du mercure est $\frac{P}{D}$:

à t° le volume du réservoir devient $\frac{P}{D}(1+\alpha t)$

et celui du mercure $\frac{P}{D}(1+\delta t)$

Nous connaissons la différence entre ces deux volumes,

$$\frac{P}{D}(1+\delta t)-\frac{P}{D}(1+\alpha t)=\frac{P-P'}{D\frac{1}{1+\delta t}};$$

($D\frac{1}{1+\delta t}$ étant la densité du mercure à t°), d'où :

$P(1+\delta t)-P(1+\alpha t)=(P-P')(1+\delta t)$ et $P(1+\alpha t)$ $=P'(1+\delta t)$ d'où nous tirons :

$$\alpha=\frac{P'(1+\delta t)-P}{Pt}=\frac{135,3755\times\frac{5700}{5550}-138,473}{138,473\times 150}=\frac{1}{37,000}$$

Digitized by Google

Problème 143.

Le poids spécifique du mercure étant 13,59 à 0°. On demande quel est à 100° le volume de 40 Kil. de ce métal. Le coefficient de dilatation du mercure étant $\frac{1}{5550}$.

$$V_1 = \frac{P}{D_0} = \frac{40}{13,59} = 2^{\text{dec. cub.}},94.$$

$$V_{100} = V_0(1+\delta t) = 2,94\left(1+\frac{100}{5,550}\right. = 2^{\text{dec. cub.}},99$$

Problème 144.

Calculer le poids du mercure à la température de 26° que contiendrait un vase conique dont la hauteur serait $0^m,87$ et le rayon $0^m,23$ à cette température. On sait que la densité du mercure à la température de 0° est 13,596 et son coefficient de dilatation 0,00018.

Cherchons d'abord le volume du cône:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi(0,23)^2\,0,87 = 48^{\text{dec. cub.}},186.$$

La densité du mercure à 26° est donnée par la formule:

$$D' = \frac{D}{1+Kt} = \frac{13,596}{1+0,00018\times 26} = \frac{1359600}{100468} = 13,533$$

Le poids sera:

$$VD' = 48,186\times 13,533 = 652^K,101.$$

Problème 145.

Le poids spécifique du mercure étant 13,59 à 0°. On demande quel est à 85° le volume de 30 Kil. de ce métal, son coefficient de dilatation étant $\frac{1}{5550}$?

Le volume à 0° est:

$$V = \frac{P}{D} = \frac{30}{13,59}.$$

Digitized by Google

Celui a 85° sera :

$$V(1+\delta t) = \frac{P}{D}(1+\delta t)$$

$$= \frac{30}{13,59}\left(1+\frac{85}{5,550}\right) = 2^{\text{m.cub.}},241.$$

Problème 146.

Une colonne d'eau de 1m,55 de hauteur et une colonne d'un autre liquide de 3m,17 de hauteur se font équilibre dans les branches d'un siphon ; la température des deux liquides est 4°. On demande 1° Quelle est la densité du second liquide par rapport à l'eau et 2° Quelle serait la hauteur à laquelle il s'élèverait si sa température était portée à 25°, celle de l'eau restant a 4° et le coefficient de dilatation de ce liquide étant $\frac{1}{6000}$?

1°. Les hauteurs étant en raison inverse des densités, on aura :

$$1^m,55 \times 1 = 3^m,17 \times d \; ; \; d = 0,4889 \text{ à } 4°,$$

2°. Soit h la hauteur du liquide à 25°, par d sa densité à 4° et par d' celle à 25° ; on a :

$$3,17 \times d = h \times d' \; ; \text{ or } d' = \frac{d}{1+\frac{21}{6000}}$$

donc :

$$3,17 \times d = h\,d\,\frac{6000}{6021} \text{ et } h = 3,17 \times \frac{6021}{6000} = 3^m,181$$

Problème 147.

Le poids de l'atmosphère fait monter le mercure à 0m,76 dans le baromètre, à la température de 0°. On demande 1° A quelle hauteur s'élèverait le mercure si la température était de 25°, le coefficient de dilatation du mercure étant $\frac{1}{5550}$; 2° A quelle hauteur s'élèverait, à 0°, l'alcool dont la densité est 0,79. La densité du mercure est 13,6 ?

Digitized by Google

1° — En représentant par H la hauteur du baromètre à 25°, et par h sa hauteur à 0°, la formule $H = h\left(1 + \frac{t}{5550}\right)$ donne :

$$H = 0,76\left(1 + \frac{25}{5550}\right) = 0^{m},7634.$$

2° Les hauteurs de mercure et d'alcool qui font équilibre à la pression atmosphérique étant en raison inverse de leur densité, si l'on représente par h' la hauteur de l'alcool, on a :

$$h' \times 0,79 = 0,76 \times 13,6 \text{ ; d'où : } h' = \frac{0,76 \times 13,6}{0,79} = 13^{m},0835.$$

Problème 148.

Quel est à 10° le volume du vase de verre qui à cette température contient exactement 3K,288322 de mercure ? Le poids spécifique du mercure à 0° est 13,59 son coefficient de dilatation $\frac{1}{5,550}$.

Le volume à 0° est égal à $\frac{P}{D} = \frac{3^{K},288322}{13,59}$

à 10° il sera $\frac{P}{D}(1 + 5t) = \frac{3^{K},288322}{13,59}\left(1 + \frac{10}{5550}\right)$

$$= 242^{\text{cent. cub.}},402.$$

Problème 149.

Une enveloppe de verre renferme 625 gr. de mercure à 10° ; à quelle température doit on l'élever pour qu'il en sorte 4 gr. de mercure ? Le coefficient de dilatation cubique du verre est $\frac{1}{38700}$ celui du mercure $\frac{1}{5550}$; la densité du mercure à 0° 13,59 ?

La densité du mercure à 10° est ——

Digitized by Google

$$13,59 \times \frac{1}{1+\frac{10}{5550}}$$

le volume occupé par 625 gr. de mercure, exprimé en centimètres cubes sera :

$$V = \frac{625}{13,59 \times \frac{555}{556}}$$

Appelons x l'excès de la température cherchée sur 10°, à cette température V deviendra :

$$V\left(1 \times \frac{x}{38700}\right)$$

la densité du mercure sera :

$$13,59 \times \frac{1}{1+\frac{x}{5550} \times \frac{556}{556}}$$

le poids du mercure renfermé dans l'enveloppe sera donc :

$$V\left(1+\frac{x}{38700}\right) \times 13,59 \times \frac{1}{1+\frac{x}{550} \times \frac{555}{556}}$$

Le poids de mercure sorti, c'est-à-dire 4 gr. sera la différence entre 625 gr. et ce dernier poids

$$625 - V\left(1+\frac{x}{38700}\right) \times 13,59$$

$$\times \frac{1}{1+\frac{x}{5550}} \times \frac{555}{556} = 4.$$

Problème 150.

Un baromètre a été observé à deux époques différentes et a donné 770 millimètres à 25° et 760 m.m à 5°. On demande le rapport entre les deux hauteurs corrigées. Le coefficient de dilatation du mercure est : $\frac{1}{5550}$

Digitized by Google

Les hauteurs des deux colonnes de mercure sont en raison inverse des densités.

On a donc :

$$\frac{h_0}{h_t} = \frac{D_t}{D_0} = \frac{D_t}{D_t(1+\delta t)} = \frac{1}{1+\delta t}$$

Appliquant cette formule à l'exemple donné on aura pour expression de la première hauteur corrigée :

$$\frac{770}{1+\frac{25}{5550}} ;$$

et pour celle de la seconde

$$\frac{760}{1+\frac{5}{5550}}$$

Le rapport de ces deux hauteurs devient, après simplification évidentes :

$$x = \frac{77+222+1111}{76+223+1110} = 1,0095$$

Problème 151.

Un tube de verre pesait vide 15 gr. puis 347 gr. plein de mercure à 0°. On le chauffe dans un bain d'huile jusqu'à une certaine température. Il laisse échapper 12 gr. de mercure. Quelle est la température du bain ? La dilatation apparente du mercure dans le verre est $\frac{1}{6480}$ pour 1°.

Le poids du mercure dans le tube à 0° égalant 347 – 15, on a d'après la formule :

$$\frac{p}{P-p} = \frac{x}{6480}$$

d'où :

$$x = \frac{6480 \times p}{P-p} = \frac{6480 \times 12}{332-12} = \frac{77760}{320} = 243°.$$

Digitized by Google

Problème 152.

On a deux thermomètres à mercure construits avec le même verre : l'un a une boule dont le diamètre intérieur est $0^m,0075$ et un tube dont le diamètre intérieur est $0^m,0025$; l'autre a une boule de $0^m,0062$ de diamètre et un tube de $0^m,0015$ de diamètre intérieur. On demande quel est le rapport de longueur d'un degré du premier thermomètre à un degré du second ?

Soient A et B les deux thermomètres donnés D et D' les diamètres des boules, d et d' les diamètres des tubes. Si l'on conçoit un troisième thermomètre C qui ait la même boule que B et le même tube que A et si l'on représente par l, l', l'' les longueurs respectives d'un degré dans les trois thermomètres, on a les proportions

$$\frac{l'}{l''} = \frac{D'^3}{D^3} \quad \text{et} \quad \frac{l''}{l'} = \frac{d'^2}{d^2}$$

en les multipliant membre à membre, il vient :

$$\frac{l''}{l'} = \frac{D^3 d'^2}{D'^3 d^2}$$

En substituant aux lettres leurs valeurs, il vient :

$$\frac{l''}{l'} = \frac{421875 \times 225}{238328 \times 625} = 0,63$$

Problème 153

Évaluer en degrés centigrades la température d'un liquide dans lequel un thermomètre de Fahrenheit marque 95 degrés ?

On sait que le thermomètre Fahrenheit

Digitized by Google

marque 32 degrés à la température de la glace fondante et 212 degrés à celle de l'eau bouillante. L'intervalle entre ces 2 températures est donc divisé en 212 – 32 = 180 degrés. Ce même intervalle est divisé sur l'échelle centigrade en 100 degrés. Un degré Fahrenheit vaut donc $\frac{10}{18}$ de degré centigrade.

Soit maintenant la température de 95 F. L'intervalle compris entre cette température et celle de la glace fondante est 95 – 32 = 63 F. Cet intervalle vaut en degrés centigrades :

$$63 \times \frac{10}{18} = 35^\circ \text{ Centigrades.}$$

Problème 154.

Evaluer en degrés centigrades la température d'un bain qui marque 5 degrés au thermomètre de Fahrenheit ?

L'intervalle compris entre la glace fondante et cette température de 5° F. est égal à 32 – 5 = 27 degrés Fahrenheit.

En multipliant ce nombre de degrés par $\frac{10}{18}$ on aura :

$$27 \times \frac{10}{18} = 15^\circ \text{ centigrades,}$$

et comme cette température est inférieure à celle de la glace fondante, ce seront 15° à compter au dessous de 0°, soit :

$$-15^\circ.$$

Problème 155.

Evaluer une température de 60° Réaumur en degrés centigrades !

Digitized by Google

Le thermomètre Réaumur marque 0° à la glace fondante et 80° à la température d'ébullition de l'eau. Un degré Réaumur vaut donc $\frac{100}{80}$ de degré centigrade et 60° R. vaudront :

$$60 \times \frac{100}{80} = 75° \text{ Centigrades.}$$

Problème 156.

Deux hauteurs barométriques de 0m 755 ayant été obtenues, l'une à −6°, l'autre à +15°. On demande quelles corrections il faut leur faire subir pour les ramener à ce qu'elles eussent été à 0°, le coefficient du mercure étant $\frac{1}{5550}$?

Désignons par H_t et H_0, D_t et D_0 les hauteurs et les densités du mercure correspondantes à t° et à 0°; la colonne barométrique à t° et à 0° faisant équilibre à la même pression, nous aurons la formule :

$$H_t \; D_t = H_0 D_0$$

mais :

$$\frac{D_t}{D_0} = \frac{1}{1+\delta t}.$$

nous aurons donc :

$$\frac{H_t}{1+\delta t} = H_0$$

et, en remplaçant par les valeurs données, la hauteur corrigée sera pour l'observation faite à −6° :

$$H_0 = \frac{0,755 \times 5550}{5550 - 6} = 0^m,755817$$

et pour celle faite à +15° :

$$H_0 = \frac{0,755 \times 5550}{5550 + 15} = 0^m,752964$$

Digitized by Google

Dilatation des Gaz — Densités des gaz et des vapeurs.

Problème 157.

On fait jouer le piston d'une machine pneumatique, la cloche est d'une capacité de 7 lit. 53, elle est remplie d'air à la pression de $0^m.76$. On demande le poids de l'air lorsque la pression est réduite à $0^m.21$, le poids de l'air tiré par le piston et le poids du volume d'air qui reste dans la cloche si on élève la température de 0° à 15°. Un litre d'air à 0° et $0^m,76$ pèse 1,3 et son coefficient de dilatation est 0,00366 ?

1° Un litre d'air pesant $1^{gr},3$, l'air contenu dans la cloche à 0° et $0^m,76$ de pression pèsera $7^{lit},53 \times 1^{gr},3 = 9^{gr},789$

Mais la pression de l'air sous la cloche n'étant plus qu'à $0^m.21$ et les poids étant en raison directe des pressions on aura pour le poids cherché

$$\frac{9,789}{x} = \frac{76}{211}$$

d'où :

$$x = \frac{9,789 \times 21}{76} = 2gr\ 705$$

Le poids de l'air retiré sera évidemment égal au poids primitif diminué du poids de l'air restant ; on aura donc pour poids de l'air retiré $9gr,789 - 2^{gr},705 = 7^{gr},084$

2° Pour avoir le poids de l'air quand la température est de 15°, cherchons la densité de 1 lit. d'air à cette température et à la pression de $0,^m21$.

la formule $\frac{V}{V'} = \frac{d'}{d}$ donne $\frac{V}{V(1+\alpha t)} = \frac{d'}{d}$

Digitized by Google

d'où :

$$d' = \frac{d}{1+\alpha t} = \frac{1}{1+0,00366 \times 15} = \frac{1}{1,0549} = 0,94.$$

Cette densité est celle que l'air aurait à 15° et à l'air pression $0^m,76$; mais à $0^m,21$ elle sera donnée par la proportion :

$$\frac{x}{0,947} = \frac{21}{76} ; \quad x = \frac{0,947 \times 21}{76} = 0,261$$

Le poids de 1 litre d'air sera alors :

$$1^{gr},3 \times 0,261$$

et les $7^{lit},084$ qui resteront sous la cloche pèseront :

$$1^{gr},3 \times 0,261 \times 7,084 = 2^{gr},4036.$$

Problème 158.

On demande à quelle température il faut élever $7^{lit},25$ d'air pris à 0° pour que le volume du gaz soit triple ; le coefficient de dilatation de l'air est 0,00367 ?

Soit x la température cherchée, la formule

$$V' = V(1+\alpha t) \text{ donne } V' = 7,25(1+0,00367 \times x)$$

Mais :

$$V' = 3V$$

on a donc :

$$3 \times 7,25 = 7,25(1+0,00367 \times x)$$

Et :

$$3 = 1 + 0,00367 \times x$$

D'où : $x = \frac{200000}{367} = 544°,9$

Problème 159

Un litre de gaz pèse $1^{gr},562$ à la température

Digitized by Google

de 0° et à la pression de $0^m,76$. On porte la température à 25°; la pression devient $0^m,78$. On pèse un litre de gaz dans ces conditions. On demande le poids qu'on doit trouver. Le coefficient de dilatation de ce gaz 0,00366.

A 0° et à la pression $0^m,76$, le volume étant 1 litre, ce volume, d'après la formule $V' = V(1+\alpha t)$ sera à 25°:

$$V' = (1 + 0,00366 \times 25)\ V.$$

Pour passer de $0^m,76$ à $0^m,78$ de pression, il faudra d'après la loi de Mariotte, multiplier V' par le rapport:

$$\frac{0,76}{0,78}$$

On aura alors:

$$V'' = \frac{76}{78}(1 + 0,00366 \times 25).$$

$$V'' = \frac{76}{78} \times 1,0915 = 1,063$$

Ce volume V'' pèsera toujours $1^{gr},562$

Mais le poids d'un litre de gaz à 1° et à la pression H n'est autre chose que la densité de ce gaz à 1° et à la pression H. Nous aurons donc, d'après la formule: $P = VD$,

en appelant x le poids demandé:

$$x = \frac{1,562}{1,063} = 1^{gr},46$$

Problème 160.

Un corps pèse dans l'air à 0° et à la pression $0^m,76$ perd $6^{gr},327$ de son poids. On demande: 1° le volume du corps, 2° sa perte de poids à 15° et à la pression $1^m,25$. On sait que la densité de l'air par rapport à l'eau est $\frac{1}{770}$ et son coefficient de

Digitized by Google

dilatation 0,00366. On néglige la dilatation du corps.

1°. 1 décimètre cube d'eau pesant 1000 gr, le même volume d'air à 0° et 0m,76 pèse $\frac{1000}{770}$. Donc le volume d'air déplacé et, par suite, le volume du corps est :

$$6^{gr},327 : \frac{100}{77} = \frac{6,327 \times 77}{100} = 4^{dec.cub},872$$

2°. Pour avoir la perte de poids à 15° et à la pression 1m,25, il faut chercher le poids de 4lit,872 à cette température et à cette pression.

Ce poids est :

$$\frac{100}{77} \times \frac{4,872 \times 1,25}{1+(0,00366 \times 15),76}$$

En effectuant le calcul on trouve pour le poids cherché 9gr,87.

Problème 161.

Une masse d'air occupe à 45° un volume de 12 litres ; On demande quel volume cette masse occuperait à 0°, le coefficient de dilatation de l'air étant 0,00366?

Soit V le volume à 0° ; à 45° il est :

$$V' = V(1+\alpha t)$$

d'où l'on tire :

$$V = \frac{V'}{1+\alpha t}$$

En remplaçant les lettres par leurs valeurs, il vient :

$$V = \frac{V'}{1+\alpha t} = \frac{12}{1+0,00366 \times 45} = 10^{lit},298$$

Problème 162.

Un ballon de verre d'une capacité de 5 litres à 0° est rempli d'acide carbonique à 0° et à la

Digitized by Google

pression $0^m,76$. On le chauffe à 100° après l'avoir ouvert pour permettre la sortie du gaz. La pression étant alors $0^m,75$. On demande le poids de l'acide carbonique sorti du ballon. Le coefficient de dilatation de l'acide carbonique est 0,00367, sa densité, celle de l'air étant prise pour unité est 1,5 ; un litre d'air à 0° et $0^m,76$ pèse $1^{gr},293$ et la dilatation cubique du verre est :

$$\frac{1}{38\,700} \text{ pour chaque degré ?}$$

A 100° et à la pression $0^m,75$, le volume de l'acide carbonique devient :

$$\frac{5(1+0,00367)76}{75} = 6^{lit},926$$

A cette même température, le volume du ballon est :

$$5\left(1+\frac{100}{38\,700}\right) = 5^{lit},013.$$

Le volume du gaz sorti est donc $6^{lit},926 - 5^{lit},013 = 1^{lit},913$

Pour avoir le poids de ce gaz, sachant que les 5 litres d'acide carbonique à 0° et $0^m,76$ pèsent :

$$1^{gr},293 \times 5 + 15 = 9^{gr},697$$

et par suite les $6^{lit},926$ à 100° à $0^m,75$ pèseront autant, on aura l'équation

$$\frac{x}{9^{gr},697} = \frac{1^{lit},913}{6,926}$$

D'où :

$$x = 2^{gr},678.$$

Problème 163.

A quelle température un litre d'air sec pèse-t-il un gramme, sous la pression $0^m,77$, le coefficient de dilatation de l'air étant 0,00366 et le

Digitized by Google

poids de 1 litre d'air sec à 0° et à la pression de 0m,76 étant 1gr,293 ?

D'après l'énoncé du problème on déduit l'équation :

$$\frac{1,293 \times 77}{(1 + 0,00366 \times t)\,76} = 1^{gr};$$

d'où l'on déduit :

$$t = 86°$$

Problème 164.

Dans un ballon de verre dont la capacité à 0° est 250c.c. on introduit une certaine quantité d'air sec capable d'occuper 25c.c. à 0° et à la pression 0m,76. Ayant fermé le ballon et chauffé à 100°, on demande la pression intérieure. Le coefficient de dilatation de l'air est 0,00367 et le coefficient de dilatation cubique du verre $\frac{1}{38\,700}$?

A 100° la capacité du ballon est :

$$250\left(1 + \frac{100}{38\,700}\right) = \frac{250 \times 388}{387}$$

A 100° et à la pression 0m,76, le volume d'air libre serait à 0m,76 :

$$25\,(1 + 0,00367 \times 100) = 25 \times 1,367.$$

Tandisque son volume réel est :

$$\frac{250 \times 388}{387} \text{ à la pression cherchée } x$$

Or les pressions d'une même masse gazeuse étant en raison inverse des volumes qu'ils occupent, on peut poser :

$$\frac{x}{25 \times 1,367} = \frac{0,76 \times 387}{250 \times 388}; \quad x = \frac{25 \times 1,367 \times 0,76 \times 387}{250 \times 388}$$

Digitized by Google

$= 0^{m},1036$

Problème 165.

3 mètres cubes d'air à la pression $0^{m},75$ et à la température de 20° sont soumis à une pression de 4 atmosphères et refroidis à 0°. On demande quel sera dans ces conditions le volume de l'air. $\alpha = 0,00367$.

Si la pression restait la même à 0°, les 3 mètres cubes occuperaient un volume :

$$V' = \frac{V}{1+at} = \frac{3}{1+20\times 0,00367} = \frac{3}{1,0734}$$

Mais la pression devient 4 atmosphères $= 4\times 0^{m},76$ et d'après la loi de Mariotte, les volumes étant en raison inverse des pressions.

On aura :

$$V'' = \frac{V'\times 0,75}{4\times 0,76} = \frac{3\times 0,75}{1,0734\times 4\times 0,76} = 0^{m.cub},689321$$

Problème 166.

Le poids d'un litre d'air sec à 0° et sous la pression $0^{m},76$ est 1,293, son coefficient de dilatation est 0,00367 ; On demande à quelle température 1 litre d'air soumis à la pression $0^{m},78$ pèsera $1^{gr},120$?

Le poids de 1 litre d'air sous la pression $0^{m},78$ et à la température x pourra s'exprimer par la formule :

$$P = \frac{1,293\times 0,78}{0,76(1+0,00367\times x)} = 1,120$$ d'après les données du problème

On aura :

Digitized by Google

$$x = \frac{1,293 \times 0,78}{0,76 \times 1,120 \times 0,00367} - \frac{1}{0,00367} =$$

$$= 50^\circ.36$$

Problème 167.

Dans un ballon de verre dont la capacité est 10 litres à 0°, on fait entrer 8 litres d'air à 20° sous la pression 0m75 et 6 litres d'acide carbonique à 5° sous la pression 0m78. On ferme alors le ballon et l'on demande qu'elle sera sa pression intérieure si on le chauffe à 100°. Le coefficient de dilatation de l'air est 0,00367 et celui du verre $\frac{1}{38700}$?

Le volume de l'air introduit, réduit à 0° et à 0m76 est :

$$\frac{8}{1+20+0,00367} \times \frac{0,75}{0,76};$$

le volume de l'acide carbonique également réduit à 0° et à 0m76 est :

$$\frac{8}{1,+20 \times 0,00367} \times \frac{0,78}{0,76}$$

Le volume total du gaz à 0° et à 0m76 sera donc

$$\frac{8}{1+20 \times 0,00367} \times \frac{0,75}{0,76} + \frac{6}{1+20 \times 0,00367} \times \frac{0,78}{0,76}$$

Le volume total de la masse gazeuse, toujours supposée à 0m76 serait à 100° :

$$(1+100 \times 0,00367) \left[\frac{8}{1+20 \times 0,00367} \times \frac{0,75}{0,76} + \frac{6}{1+20 \times 0,00367} \times \frac{0,78}{0,76}\right]$$

Mais le volume du ballon à 100° étant 10 litres $\left(1+\frac{100}{38,700}\right)$

Digitized by Google

et les pressions étant en raison inverse des volumes on a :

$$\frac{0,76(1+100\times 0,00367)\left[\frac{8}{1+20\times 0,00367}\times\frac{0,75}{0,76}+\frac{6}{1+20\times 0,00367}\times\frac{0,78}{0,76^{\circ}}\right]}{10\left(1+\frac{100}{38,700}\right)}$$

En effectuant les calculs, on trouve :

$$x = 1^{m},39$$

Problème 168.

Un ballon de verre primitivement plein d'air sec à 0° et sous la pression $0^{m},76$ est chauffé à 100°, il s'échappe 1 gr. de gaz et la pression ne change pas. On demande quel était le volume du ballon à 0° et quel poids de gaz il renfermait à cette température. Le poids du litre d'air sec à 0° et sous la pression $0^{m},76$ est $1^{gr},293$; le coefficient de dilatation du verre est $\frac{1}{38\,700}$, celui de l'air 0,00367 ?

Soit V le volume du ballon à 0° :

$V' = V(1+0,00367\times 100)$ sera le volume de l'air à 100° :

$V'' = V\left(1+\frac{100}{38,700}\right)$ sera le volume du ballon à 100° :

Et $V'-V''$ le volume à 100° du gaz sorti du ballon.

Le poids de ce dernier volume $V'-V''$ est 1 gr. ; en réduisant ce volume à la température de 0° on a pour expression de son poids :

$$V'-V''\frac{1,293}{1+0,00367\times 100} = 1^{gr.}$$

et remplaçant V' et V'' par leurs valeurs on aura :

$$\left[V(1+0,00367\times 100)-V\left(1+\frac{100}{38\,700}\right)\right]\frac{1,293}{1+0,00367\times 100} = 1^{gr.}$$

Digitized by Google

D'où l'on tire :

$$V = 2^{lit},9017 \text{ et } P = 3^{gr},751$$

Problème 169.

Trouver le poids de 10^{lit} d'acide carbonique à la température de 20° et sous la pression de 3 atmosphères. Le poids d'un litre d'air à 0° et à la pression $0^{m},76$ est $1^{gr},293$; la densité de l'acide carbonique est 1,52 ; le coefficient de dilatation des gaz est 0,00366.

Le poids de 1 litre d'acide carbonique à 0° et à $0^{m},76$ sera $1,293 \times 1,52$

A 20° et à la pression de 3 atmosphères ce poids sera :

$$\frac{1,293 \times 1.52}{1 + 0,00366 \times 20} \times \frac{3 \times 0,76}{0,76}$$

Le poids demandé sera donc :

$$10 \times \frac{1,293 \times 1,52 \times 3}{1 + 0,00366 \times 20} = 54^{gr},939$$

Problème 170.

Une certaine quantité d'air sec occupe à la température de 15° un volume de 5^{lt} sous la pression $0^{m},60$. On demande 1° quel est le poids de cet air ; 2° Quelle force élastique il posséderait à la température de 250° et s'il se trouvait amené à avoir un volume de 300^{cc}. Le coefficient de dilatation de l'air est : 0,00367 ; le litre d'air sec à 0° et à $0^{m},76$ pèse $1^{gr},293$?

1° A 15° et à $0^{m},76$ un litre d'air pèsera :

$$\frac{1,293}{1 + 0,00367 \times 15}$$

Digitized by Google

A cette même température, mais à la pression $0^m,60$ il pèsera :

$$\frac{1,293}{1+0,00367\times 15}\times\frac{0,60}{0,76};$$

par suite le poids des $0^{lit},005$ pris dans ces conditions de pression et de température est de :

$$0,005\times\frac{1,293}{1+0,00367\times 15}\times\frac{0,60}{0,76}$$

En effectuant les calculs on trouve pour ce poids $0^{gr},004837$

2° Pour trouver sa force élastique x à 250° et sous le volume de $300^{c.c.}$ on aura l'égalité :

$$0^{lit}\,300\times\frac{1,293}{1+0,00367\times 250}\times\frac{x}{0,76}=0^{gr},004837$$

D'où l'on tire :

$$x=0^m,01817$$

Problème 171.

On place dans une cloche contenant de l'air à 0° et à $0^m,76$ un fléau de balance aux deux extrémités duquel sont suspendus deux solides, l'un de ces solides est un cube de $0^m,05$ de coté et l'autre est un parallélipipède rectangle qui a $0^m,10$ de long, $0^m,07$ de large et $0^m,08$ de haut. Ces deux corps sont de poids égal et le fléau se tient en équilibre, cet équilibre sera rompu si on élève la température de l'air. On demande à $0^{gr},001$ près, quel poids il faudrait ajouter et de quel coté, pour rétablir l'équilibre, quand la température de l'air sous la cloche est amené à 60°. On suppose d'ailleurs que les deux bras du fléau sont d'égal volume. On prendra pour coefficient de dilatation de l'air 0,00366 et pour poids du litre d'air $1^{gr},293$.

Digitized by Google

Soient V et V' les volumes des deux corps. P leur poids commun, p le poids d'un litre d'air à 0° et 0m,76. Si l'on fait le vide, le premier corps pèse P + Vp et le second P + V'p.

En laissant rentrer l'air et portant la température à 60°, le poids du premier corps deviendra :

$$P + Vp - \frac{Vp}{1+0,00366\times 6}, \quad \frac{Vp}{1+0,00366\times 60} \text{ étant}$$

le poids de l'air déplacé à 60°

le poids du second corps deviendra :

$$P + V'p - \frac{V'p}{1+0,00366\times 60}$$

La différence des poids des deux corps sera donc :

$$(V - V')p\left(1 - \frac{1}{1+0,2196}\right) = \frac{V - V'p \times 0,2196}{1,2196}$$

Problème 172.

Un corps perd de son poids 7 gr dans l'air. Combien perdrait-il dans l'acide carbonique et dans l'hydrogène ? On sait que la densité de l'acide carbonique est 1,529, celle de l'hydrogène 0,069 ?

A l'égalité de volume, les poids des gaz sont proportionnels à leurs densités ; ainsi d'après la loi d'Archimède le volume du gaz déplacé, par suite la perte de poids du corps sera :

pour l'acide carbonique 1,529 × 7 = 10gr,703
pour l'hydrogène 0,069 × 7 = 0,483

Problème 173

Un ballon vide pèse 152 gr 475 ; plein d'air 160 gr 158, plein d'un autre gaz 162 gr 235. La pression étant invariable, on demande : 1° La densité

Digitized by Google

de ce gaz rapporté à celle de l'air. 2° Quelle correction on aurait dû faire si la pression avait été $0^m,75$ pendant la pesée de l'air et $1^m,77$ pendant la pesée de l'autre gaz?

1° Le poids de l'air et celui du gaz sont évidemment égaux aux différences entre le poids du ballon vide et les poids du ballon plein d'air et plein de gaz.

Poids de l'air $160^{gr},158 - 152^{gr},475 = 7^{gr},683$

Poids du gaz $162,235 - 152,475 = 9,760$

En appelant D la densité on aura :

$$D = \frac{9,760}{7,683} = 1,270$$

2° La correction consiste à ramener le poids de l'air et celui du gaz à la pression de $0^m,76$. Le poids de l'air contenu dans le ballon à la pression 0,76 serait :

$$\frac{7^{gr},683 \times 76}{75}$$

Le poids du gaz, ramené également à la pression 0,76 devient :

$$\frac{9,760 \times 76}{177}$$

La densité cherchée s'obtiendra par le rapport :

$$\frac{9,760 \times 76}{177} \quad \frac{7,683 \times 76}{75} = \frac{9,760 \times 75}{7,683 \times 177}$$

En effectuant le calcul on trouve :

$$D = 0,538$$

Problème 174.

1° Tirer la densité d'un gaz des trois données suivantes : un ballon vide pèse $837^{gr},356$; plein d'air il pèse $848^{gr},201$; plein d'un autre gaz il pèse $852^{gr},492$. Ces pesées ont été faites à la

Digitized by Google

température de 0° et à la pression $0^m,76$.

2°. Quelles seraient les corrections à faire si la pesée du gaz avait été faite à 18° et à la pression $0^m,73$?

1°. La densité d'un gaz étant le rapport du poids d'un certain volume de ce gaz à celui du même volume d'air pris dans les mêmes circonstances de température et de pression nous aurons pour le poids du gaz donné :

$$852^{gr},492 - 837,356 = 15^{gr},136$$

et pour celui de l'air :

$$848^{gr},201 - 837^{gr},356 = 10^{gr},845$$

la densité cherchée sera :

$$D = \frac{15,136}{10,845} = 1,3956.$$

2°. Si la pesée pour le gaz avait été faite à 18° et à $0^m,73$ de pression, il faudrait ramener le poids à 0° et à $0^m,73$. Le poids du gaz que contient le ballon étant 15,136 à $0^m,73$, serait à $0^m,76$:

$$15,136 \times \frac{0,76}{0,73}$$

les poids d'un même volume de gaz étant proportionnels à la pression.

Pour ramener ce poids à 0°, en prenant pour coefficient de dilatation des gaz 0,00366, on a la formule bien connue :

$$V_0 = \frac{V'}{1+\alpha t}$$

ou :

$$\frac{15,136 \times 0,76}{0,73 \times (1+0,00366 \times 18)} = 14^{gr},784$$

Digitized by Google

Problème 175.

Déterminer le poids de l'air contenu dans un cylindre dont le rayon de la base est $0^m,3$ et la hauteur $0^m,8$; la densité de l'air, comparée à celle de l'eau est 0,0013

La formule $\pi R^2 H$ donnera pour le volume d'air contenu dans le cylindre :

$$3,1416 \times 0,09 \times 0,8 = 0^{m.c},226195$$

Le même volume d'eau pèserait $226^K,195$; mais les densités étant proportionnelles aux poids on aura pour exprimer le poids demandé :

$$x = 226^K,195 \times 0,0013 = 294^{gr},053$$

Problème 176.

Un corps dont le volume est de 4 mètres cubes pèse dans l'air 1000^K; On demande son poids dans le vide ?

Tout corps plongé dans l'air perd une partie de son poids égale au poids du volume d'air qu'il déplace.

Pour avoir le poids du corps dans le vide, il faut ajouter à son poids dans l'air le poids des $4^{m.c.}$ de l'air qu'il déplace.

Le litre d'air pèse $1^{gr},3$, les $4^{m.c.}$ pèseront donc $4 \times 1^K,300 = 5^K,200$.

Le poids réel du corps sera donc :

$$1000^K + 5,200 = 1005^K,200$$

Problème 177.

Un ballon de verre, primitivement plein d'air sec à 0° et sous la pression de $0^m,76$ est chauffé à 100°. Il s'échappe 1 gramme de ce gaz

Digitized by Google

et la pression ne change pas. On demande quel était le volume du ballon à 0° et quel poids de gaz il renfermait ?

Le poids du litre d'air sec à 0° et 0m,76 est égal à 1,293 ; le coefficient de dilatation des gaz est 0,00367 celui du verre $\frac{1}{38,700}$

Le poids du gaz qui s'est échappé est évidemment égal au poids du gaz que le ballon contenait à 0° moins celui qu'il contient à 100°.

Soit V le volume du ballon à 0° à 100° ce volume devient :

$$V\left(1+\frac{100}{38\,700}\right)$$

à cette même température le poids du litre d'air sera :

$$\frac{1,293}{1+0,00367\times 100}$$

Le poids de l'air contenu dans le ballon à 100° sera :

$$V\left(1+\frac{100}{38\,700}\right)\times\frac{1,293}{1+0,0036\times 100}=V\times\frac{388}{387}\times\frac{1293}{1367}$$

D'un autre côté, le poids de l'air à 0° sera évidemment : $V\times 1,293$

Le poids de l'air sorti à 100° exprimant la différence entre les poids à 0° et à 100° nous aurons :

$$1^{gr}=V\left[1,293-\left(\frac{388}{387}\times\frac{1,293}{1,367}\right)\right]$$

Le poids du gaz à 0° sera donc

$$2,9\times 1,293=3^{gr},749$$

Problème 178

Un ballon vide pèse 137gr,435 ; plein d'air, il pèse 145gr,237 ; plein d'un autre gaz

Digitized by Google

152 gr, 118. On demande 1° La densité du gaz par rapport à l'air, lorsque la pression et la température seront restées invariables. 2° la même densité dans le cas où la pression aurait été de 0m, 75 pendant la pesée de l'air et de 0m, 77 pendant la pesée de l'autre gaz. 3° quel genre de correction aurait il fallu faire si la température avait été de 8° pendant la pesée de l'air et de 11° pendant celle du gaz ?

1° Poids de l'air 145,237 – 137,435
= 7 gr, 802

Poids du gaz 152,118 – 137,435
= 14 gr, 683

Densité du gaz

$$\frac{14,683}{7,802} = 1,8806$$

2° Le poids de l'air à 0m, 75 étant 7 gr, 802, serait à 0m, 76 de pression $\frac{7,802 \times 76}{75}$, pour le même volume. De même le poids du gaz à 0m, 77 serait

$$\frac{14,683 \times 76}{77}$$

La densité du gaz dans ce cas est donc :

$$\frac{14,683 \times 75}{7,802 \times 77} = 1,8337$$

3° Si pendant les pesées de l'air et du gaz les températures avaient été de 8° et de 11°, il faudrait ramener les poids des gaz à 0° ; on aurait alors pour poids de l'air 7,802 (1 + 0,00366 × 8) et pour celui du gaz 14,683 (1 + 0,00366 × 11. En divisant ce dernier poids par celui de l'air à 0° on aurait la densité du gaz (On néglige la dilatation du verre)

Digitized by Google

Problème 179.

Le poids spécifique de l'hydrogène protocarboné est représenté par 0,559, lorsqu'on prend celui de l'air pour unité. Ceci posé, on admet qu'à la température de 20° et sous la pression de 0,76, un ballon sphérique complètement plein d'hydrogène protocarboné se trouve en équilibre dans l'air, sans tendre à monter ni à descendre. On sait que l'étoffe dont le ballon est formé pèse 2400g par mètre carré et l'on demande quel est le rayon du ballon. On négligera la différence qui existe entre le volume du gaz intérieur et celui de l'air déplacé. Le coefficient de dilatation des gaz est 0,00367 et l'on sait que le litre d'air à 0° et à 0m,76 pèse 1g,293 ?

Soit R le rayon du ballon exprimé en décimètres. Le volume du ballon en décimètres cubes sera égal à $\frac{4}{3}\pi R^3$. Le poids en grammes de l'air déplacé est :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{1,293}{1+0,00367\times 20}$$

La surface du ballon en décimètres carrés $4\pi R^2$. Le poids de l'enveloppe en grammes est :

$$4\pi R^2 \times 2,40$$

Le poids de l'hydrogène protocarboné est :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{1,293\times 0,559}{1+0,00367\times 20}$$

Il est évident que pour qu'il y ait équilibre il faut que le poids de l'air déplacé soit égal au poids de l'hydrogène protocarboné augmenté du poids de l'enveloppe.

Nous aurons donc :

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \times \frac{1,293}{1+0,00367\times 20} = 4\pi R^2 \times 2,40 + \frac{4}{3}\pi R^3 +$$

Digitized by Google

$$+ \frac{1,293 \times 0,559}{1+0,00367 \times 20}$$

et en simplifiant :

$$\frac{R}{3} \times \frac{1,293}{1+0,00367 \times 20} = 2,40 + \frac{R}{3} \times \frac{1,293 \times 0,559}{1+0,00367 \times 20}$$

D'où l'on tire :

$$R = 1^{m},3553$$

Problème 180.

Dans quelle proportion en volume faut-il mêler l'air et l'acide carbonique pour que le litre du mélange pèse $1^{gr},4$ à 20° et à la pression $0^{m},74$. Le litre d'air à 0° et à $0^{m},76$ pèse 1,293 ; la densité de l'acide carbonique a pour expression 1,5 quand on prend pour unité celle de l'air dans les mêmes conditions. Le coefficient de dilatation des gaz est : 0,00367 ?

Soient x le volume de l'air et y le volume de l'acide carbonique ; on aura pour poids de l'air à 20° et à $0^{m},74$

$$\frac{x \times 1,293 \times 0,74}{(1+0,00367 \times 20) \times 0,76}$$

Celui de l'acide carbonique dans les mêmes conditions est :

$$\frac{y \times 1,293 \times 1,5 \times 0,74}{(1+0,00367 \times 20) \times 0,76}$$

On a $x + y = 1^{lit}$; $y = 1 - x$; en remplaçant y par sa valeur $1 - x$, on aura donc pour poids du litre :

$$\frac{x \times 1,293 \times 0,74}{(1+0,00367 \times 20) \times 0,76} + \frac{(1-x) \times 1,293 \times 1,5 \times 0,74}{(1+0,00367 \times 20) \times 0,76} = 1^{gr},4$$

D'où l'on tire $x = 0^{lit},6127$; $y = 0^{lit},3873$

Digitized by Google

Problème 181.

A quelle température faut-il porter l'acide carbonique pour que sous la pression $0^m,50$ le litre de ce gaz pèse $1^{gr},7$? La densité de l'acide carbonique par rapport à l'air est 1,5 ; Le coefficient de dilatation des gaz est 0,00367 ; le poids du litre d'air dans les conditions normales est $1^{gr},293$?

Le poids du litre d'acide carbonique à 0° et à 0,76 sera $1,5 \times 1,293$; à x° et à la pression $0^m,50$ le poids du litre sera :

$$\frac{1,293 \times 15}{1+0,00367\,x} \times \frac{0,50}{0,76} = 1^{gr},7$$ d'après les données du problème. En résolvant cette équation on trouve $x = -67°,96$.

Problème 182.

Quel est le poids de 10^{lit} d'un corps gazeux à 30° composé 1° par de l'air pris à la pression $0^m,235$
2° par de l'acide carbonique à 0,521
3° par de l'hydrogène à 0,352
4° par de la vapeur d'eau à 0,18

Les densités de l'acide carbonique, de l'hydrogène et de la vapeur d'eau sont respectivement 1,52 ; 0,06 0,622.

Le poids du litre d'air à 0° et 0,76 est $1^{gr},29$.
Le coefficient de dilatation des gaz 0,00366.
Poids de 1^{lit} d'air à 30° et à $0^m,235$

$$= \frac{1,293}{1+0,00366 \times 30} \times \frac{0,235}{0,76}$$

" acide carbonique à 0,521

$$= \frac{1,293 \times 1,52}{1+0,00366 \times 30} \times \frac{0,521}{0,76}$$

Digitized by Google

Poids d'un litre d'hydrogène à 0, 352

$$= \frac{1,293 \times 0,06}{1+0,00366 \times 30} \times \frac{0,352}{0,76}$$

id de la vapeur d'eau à 0,18

$$= \frac{1,293 \times 0,622}{1+0,00366 \times 30} \times \frac{0,18}{0,76}$$

En faisant la somme de ces quantités on trouve :

$$\frac{1,293 \times 1,16}{0,843448}$$

qui exprime le poids de 1 litre du gaz composé. Un litre pèsera donc :

$$\frac{1,293 \times 1,16}{0,843448} \times \frac{1}{4}$$

Et 10 litres pèseront :

$$\frac{1,293 \times 1,16}{0,843448} \times \frac{10}{4} = 4^{gr},446$$

Problème 183.

10 litres d'un certain gaz à 27° sous la pression $0^{m},684$, pèsent $16^{gr},15$. Quelle est la densité de ce gaz et, d'après la densité quel peut être ce gaz? Un litre d'air à 0° et à 0,76 pèse $1^{gr},293$. On prendra pour dilatation des gaz $\frac{1}{273}$?

Calculons ce que pèse un litre de ce gaz à 0° et sous la pression $0^{m},76$. En divisant ce poids par celui d'un litre d'air dans les mêmes conditions, nous aurons sa densité. Un litre pèse :

$$\frac{16,16\left(1+\frac{27}{273}\right) \times 760}{10 \times 684}$$

Sa densité sera :

$$\frac{16,15 \times 300 \times 760}{10 \times 684 \times 273 \times 1,293} = 1,525$$

Digitized by Google

densité qui correspond à celle de l'acide carbonique.

Problème 184.

Quel est le volume de 1 gramme d'eau réduit en vapeur à 30° sous la pression de 31$^{m.m}$? La densité de la vapeur d'eau est égale aux $\frac{5}{8}$ de celle de l'air dans les mêmes conditions?

Puisque dans les mêmes conditions de température $\frac{5}{8}$ de celle de l'air, le volume de 1^{gr}, de vapeur d'eau sera dans les mêmes circonstances les $\frac{8}{5}$ du volume de 1^{gr} d'air.

Cherchons d'abord ce dernier volume. On sait que le volume occupé par 1^{gr},293 d'air sec à 0° et 0^{m},76 est de 1$^{déc.cub}$; le volume occupé par 1^{gr} sera donc :

$$\frac{1^{déc.cub}}{1,293}$$

Si la pression passe de 760$^{m.m}$ à 31$^{m.m}$, la température restant 0°, le volume devient, d'après la loi de mariotte

$$\frac{1^{déc.cub.}}{1,293} \times \frac{760}{31}$$

Enfin pour une élévation de 30°, le volume sera exprimé par :

$$\frac{1}{1,293} \times \frac{760}{31} \times (1 + 0,00367 \times 30)$$

Cette expression, multipliée par $\frac{8}{5}$ donne pour le volume d'un gramme de vapeur d'eau dans les conditions du problème :

$$\frac{1^{d.c} \times 760 \times (1 + 0,00367 \times 30) \times 8}{1,293 \times 31 \times 5}$$

Ce qui donne pour le volume demandé 33$^{déc.cub.}$

Digitized by Google

Chaleur latentes de fusion.

Problème 185.

Combien faudrait-il de Kilogrammes de glace à 0° pour amener à 10° l'eau contenue dans un bassin à bord circulaire et à fond horizontal, dont la circonférence supérieure serait 8m,30; la circonférence inférieure 6m,15 et la hauteur 1m,76; ce bassin étant rempli d'eau à moitié de sa hauteur et la température de l'eau du bassin étant 30° ?

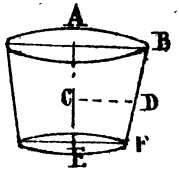


Fig. 9.

Calculons le poids de l'eau renfermée dans ce bassin; cette eau occupe une partie d'un tronc de cône (fig. 9) dont les rayons des bases supérieure et inférieure sont AB et EF et dont la hauteur est DF.

On a d'après l'énoncé :

$$AB = \frac{8,30}{2\pi} = 1,^{m}3210$$

$$EF = \frac{6,15}{2\pi} = 0,9788$$

D'où CD, le rayon moyen :

$$= \frac{AB+EF}{2} = 1,1499$$

et DF, hauteur du liquide :

$$= \frac{1,76}{2} = 0,88$$

Le volume V du liquide sera :

$$V = \frac{\pi DF}{3}\left(\overline{CD}^2 + \overline{EF}^2 + CD \times EF\right) =$$

$$= \frac{3,1416 \times 0,88}{3}\left[\overline{1,1499}^2 + \overline{0,9788}^2 + 1,1499 \times 0,9788\right]$$

Digitized by Google

En effectuant les calculs, on trouve $V = 3^{m.c}, 137593$; et comme le mètre cube pèse 1000 Kilog. On aura pour poids de l'eau $3137^{Kil}, 593$

Appelons x le poids de la glace demandée, la chaleur latente de la glace étant 79, $79x$ représentera la chaleur absorbée par la glace pour fondre sans élévation de température et $10x$ représentera la quantité de chaleur absorbée par l'eau pour passer de 0° à -10°.

D'un autre côté, la chaleur perdue par l'eau est égale à $3137^{K}, 593\ (30° - 10°)$.

On aura donc puisque le gain de l'un est égal à la perte de l'autre :

$$79x + 10x = 3137.593 \times 20$$

D'où l'on tire :

$$x = 705^{Kil}, 077$$

Problème 186.

On plonge dans un bain de 20 litres d'eau à 80° une sphère en glace à 0° de 144 m.m de rayon. Calculer la température du bain après la fusion de la glace ; la chaleur latente de fusion de la glace étant 79.25 ?

Cherchons le poids de la sphère qui nous est donné par la formule :

$$P = VD. \ ; \ P = \frac{4}{3} \pi R^3 D$$

nous aurons donc :

$$P = \frac{4}{3} \times 3,141 \times (1^{dec.m}, 44)^3$$

En supposant la densité de la glace à 0° et exprimant le rayon de la sphère en décimètres, pour

Digitized by Google

avoir le poids en Kilogrammes, on a ainsi :

$$P = 4 \times 1,047 \times 2,986 = 12^{K},506.$$

Désignant par x la température cherchée, la glace en se fondant absorbe 79,25 unités de chaleur par Kilogramme et absorbe encore x unités de chaleur pour passer de 0° à x°; la quantité de chaleur gagnée sera donc représentée par :

$$12^{K},506 \times 79,25 + 12,506\, x$$

D'un autre côté, le bain devant retomber de 80° à x°, la chaleur perdue sera : $20(80-x)$, et comme le gain est égal à la perte, on aura, pour déterminer x :

$$1,506 \times 79,25 + 12,506 . x = 20(80-x)$$

d'où : $(12,506+20)x = 20 \times 80 - 12,506 \times 79,25$

et

$$x = \frac{1600 - 991,101}{32,506} = 18°,7$$

Problème 187.

On mêle $4^{K},25$ de glace à 0° avec 14^{K} d'eau à 36°; quelle sera la température du mélange ?

Soit x la température du mélange. La glace en se fondant absorbera $79,25 \times 4,25$ calories et $4,25 . x$ calories pour passer de 0° à x°. La quantité de chaleur absorbée par la glace sera donc :

$$4,25 \times (79,25 + x)$$

D'un autre côté les 14 Kilogrammes d'eau en passant de 36° à x°, abandonneront une quantité de chaleur exprimée par $14(36-x)$, nous aurons donc :

$$4,25 \times (79,25 + x) = 14(36-x)$$

Digitized by Google

D'où : $x = 8^\circ,92$

Problème 188.

11 Kilogrammes de glace à 0° ont été mélangés avec P Kilogrammes d'eau à 45° ; le mélange après la température de 12° ; On demande le poids P?

Ce poids P en passant de 45° à 12° a perdu une quantité de chaleur égale à $P(45^\circ - 12^\circ)$

Les 11 K. de glace pour se fondre absorberont 11×79 unités de chaleur et pour passer de 0° à 12° l'eau résultante absorbera encore 11×12.

On pourra donc établir l'équation :

$$P(45-12) = 79 \times 11 + 12 \times 11$$

d'où :

$$P = 30^{Kil.},333.$$

Problème 189.

On mêle 7 K. de glace à 0° avec 30 K. d'eau à 47° : Quelle sera la température du mélange ?

Soit x la température cherchée. Chaque Kilogramme de glace, en se fondant, absorbe 79 unités de chaleur, et pour passer de 0° à x°, il absorbera encore x unités. La chaleur absorbée sera donc :

$$7 \times 79 + 7x$$

D'un autre coté, les 30 Kil. d'eau en passant de 47° à x° perdront $30(47-x)$ calories

On aura donc :

$$7 \times 79 + 7x = 30(47-x)$$

$$7x + 30x = 30 \times 47 - 7 \times 79$$

$$x = \frac{30 \times 47 - 7 \times 79}{37}$$

Digitized by Google

D'où en effectuant, $x = 23°, 16$

Problème 190.

Un vase de cuivre pesant 825 gr. contient 175 gr. de glace à 0°; on y verse 675 gr. d'eau à 48°. On demande si toute la glace fondra et, dans ce cas quelle sera la température du mélange. Chaleur spécifique du cuivre 0.12. Chaleur latente de la glace 79?

La chaleur que pourrait céder l'eau en se refroidissant jusqu'à 0° est $675 \times 48 = 32400$. Celle que demande la glace pour fondre est $175 \times 79 = 13825$.

La glace fondra donc.

Pour trouver la température du mélange x, je pose l'équation:

$$175 \times 79 + 175x + 825 \times 0,12x = 675(48 - x)$$

$$175 \times 79 (175 + 825 \times 0.12)\, x = 675 \times 48 - 675x$$

$$(175 + 825 \times 0,12 + 675)\, x = 32,400 - 175 \times 79$$

$$x = \frac{18575}{949} = 19°, 57$$

Problème 191.

Quelle est la hauteur en mètres de la couche de pluie qui devrait tomber sur une surface couverte de glace à 0° pour la fondre en totalité? On suppose que l'épaisseur de la glace est 0m,05 et que la pluie tombe à la température de 15°?

Considérons une surface de 1 mètre carré, appelons x la hauteur de la pluie tombée; son volume

Digitized by Google

en décimètres cubes sera : $100x$, nombre qui exprimera en même temps son poids en kilogrammes (on néglige la variation de densité de 4° à 15°)

La chaleur cédera à la glace pour la fondre sera :

$$-100 \times x \times 15.$$

D'un autre côté le volume de la glace est $100 \times 0^{dec},5 = 50^{dec.cub}$ son poids sera 50^{K}, en négligeant la différence de densité de la glace et de l'eau. Ces 50^{K} de glace absorberont pour se fondre 50×79 calories ; on aura donc l'équation :

$$100 \times x \times 15 = 50 \times 79$$

$$x = \frac{50 \times 79}{100 \times 15} = 0^{m},263$$

Digitized by Google

Chaleurs latentes de vaporisation.

Problème 192.

Combien faut-il de kilogrammes de vapeur d'eau à 100° pour porter un bain de 246 kilogrammes d'eau de 13° à 28°? La chaleur latente de la vapeur d'eau est 540?

Soit x le nombre de kilogrammes cherché; $540\,x$ sera la quantité de chaleur abandonnée par cette vapeur dans sa condensation. Les x kilogrammes d'eau formée devront passer de 100° à 28° et abandonneront par suite encore $x(100-28)$ unités de chaleur.

D'un autre côté, les 246 kilogrammes d'eau, en passant de 13° à 28° absorberont une quantité de chaleur égale à $246 \times (28-13)$ et comme la quantité de chaleur absorbée par l'eau du bain est égale à celle abandonnée par la vapeur on aura:

$$540\,x + x(100-28) = 246\,(28-13)$$

D'où: $612\,x = 3690$; $x = 6^{K},03$

Problème 193.

Trouver combien il faut de kilogrammes de vapeur d'eau à 100° pour élever 20 kilogrammes d'eau de 0° à 90°

Soit x le nombre de kilogrammes cherché, chaque kilogramme abandonnant 540 unités de chaleur, $540\,x$ sera la chaleur cédée par la vapeur en se con- [illegible] et $(100-90)\,x$ celle cédée pour se refroidir

Digitized by Google

$540\,x + 10\,x$ exprimera donc la chaleur totale cédée par x Kilogramme de vapeur pour se refroidir à 90°.

D'un autre coté, chaque Kilogramme d'eau absorbera pour passer de 0° à 90°, 90 unités de chaleur, 20 K. d'eau en absorberont donc 20×90. Le gain de l'un est égal à la perte de l'autre, on aura donc l'équation :

$$540\,x + 10\,x = 20 \times 90$$

D'où : $550\,x = 1800$ et $x = 3^{Kil},372$.

Problème 194.

Combien faut-il de glace à 0° pour liquéfier et ramener à 0° 25 Kilogr. de vapeur dégagée d'un appareil où le thermomètre marque 100° et le baromètre $0^{m},76$?

La glace à 0° pour fondre sans élévation de température absorbe 79 calories ; soit, dans le cas présent $x \times 79$.

D'un autre coté les 25 K de vapeur d'eau en se condensant perdent une quantité de chaleur exprimée par 25×540 et en passant de 100° à 0° ils perdent encore 25×100.

On aura donc :

$$79\,x = 25 \times 540 + 25 \times 100$$

D'où :

$$x = 202^{K},522$$

Problème 195.

Combien de vapeur à 100° faut-il pour porter de 8° à 25° l'eau contenue dans une cuve

Digitized by Google

Chaleurs latentes de vaporisation.

Problème 192.

Combien faut-il de Kilogrammes de vapeur d'eau à 100° pour porter un bain de 246 Kilogrammes d'eau de 13° à 28°? La chaleur latente de la vapeur d'eau est 540?

Soit x le nombre de Kilogrammes cherché; $540\,x$ sera la quantité de chaleur abandonnée par cette vapeur dans sa condensation. Les x Kilogrammes d'eau formée devront passer de 100° à 28° et abandonneront par suite encore $x(100-28)$ unités de chaleur.

D'un autre coté, les 246 Kilogrammes d'eau, en passant de 13° à 28° absorberont une quantité de chaleur égale à $246 \times (28-13)$ et comme la quantité de chaleur absorbée par l'eau du bain est égale à celle abandonnée par la vapeur on aura:

$$540\,x + x(100-28) = 246\,(28-13)$$

D'où: $612\,x = 3690$; $x = 6^{K},03$

Problème 193.

Trouver combien il faut de Kilogrammes de vapeur d'eau à 100° pour élever 20 Kilogrammes d'eau de 0° à 90°

Soit x le nombre de Kilogrammes cherché, chaque Kilogramme abandonnant 540 unités de chaleur, $540\,x$ sera la chaleur cédée par la vapeur en se condensant et $(100-90)\,x$ celle cédée pour se refroidir à 90°.

Digitized by Google

$540\,x + 10\,x$ exprimera donc la chaleur totale cédée par x Kilogramme de vapeur pour se refroidir à 90°.

D'un autre coté, chaque Kilogramme d'eau absorbera pour passer de 0° à 90°, 90 unités de chaleur, 20 K. d'eau en absorberont donc 20×90. Le gain de l'un est égal à la perte de l'autre, on aura donc l'équation :

$$540\,x + 10\,x = 20 \times 90$$

D'où : $550\,x = 1800$ et $x = 3^{Kil},372$.

Problème 194.

Combien faut-il de glace à 0° pour liquéfier et ramener à 0° 25 Kilogr. de vapeur dégagée d'un appareil où le thermomètre marque 100° et le baromètre $0^m,76$?

La glace à 0° pour fondre sans élévation de température absorbe 79 calories ; soit, dans le cas présent $x \times 79$.

D'un autre coté les 25 K de vapeur d'eau en se condensant perdent une quantité de chaleur exprimée par 25×540 et en passant de 100° à 0° ils perdent encore 25×100.

On aura donc :

$$79\,x = 25 \times 540 + 25 \times 100$$

D'où :

$$x = 202^K,522$$

Problème 195.

Combien de vapeur à 100° faut-il pour porter de 8° à 25° l'eau contenue dans une cuve

Digitized by Google

cylindrique à fond plat de 1m.25 de rayon et qui forme une couche de 0m,75 d'épaisseur ?

Le volume d'eau est $\pi R^2 H = 3681^{lit}.562$.

Le poids P de vapeur en le condensant abandonne $540 \times P$ Calories, le poids P en passant de 100° à 25° perd encore $P(100-25)$ calories. La quantité totale de chaleur perdue est donc $P \times 540 + P(100-25)$.

D'un autre côté les $3681^{lit},562$ en passant de 8° à 25° absorbent évidemment une quantité de chaleur égale à $3681,562 \times (25-8)$, et, comme le gain est égal à la perte on aura :

$$540\,P + (100-25)\,P = 3681^{lit},562 \times (25-8)$$

D'où :

$$P = 101^{Kil},766$$

Problème 196.

La chaleur latente de la vapeur d'eau étant 540, on demande à quelle température on élèvera 20 litres d'eau à 4° en y condensant 1 Kilogr. de vapeur à 100° et à 0m,76.

Soit x la température finale, un Kilogramme de vapeur en se condensant perd 540 unités de chaleur et en passant de 100° à x°, il en perd encore $100-x$. Les 20 litres d'eau pour passer de 4° à x° absorberont : $20(x-4)$; on aura donc l'équation :

$$540 + (100-x) = 20(x-4)$$

En résolvant l'équation on trouve :

$$x = 34°,28.$$

Problème 197.

Un marmite de Papin contient 3K.25 d'eau

Digitized by Google

à 142°. En ouvrant la soupape, une portion de l'eau se vaporise et l'autre se refroidit à 100°. On demande le poids de vapeur produit, sachant que la chaleur latente de vaporisation de l'eau est 540.

Soit x le poids de la vapeur produite, la chaleur absorbée sera $540\,x$ et celle perdue par l'eau sera :

$$(142 - 100) \times 3,25$$

On aura donc :

$$540\,x = 3,25 \times 42$$

D'où :

$$x = 0^{k},253$$

Problème 198.

Une cuve cylindrique à fond plat et horizontal a $1^{m},30$ de diamètre et $0^{m},75$ de hauteur intérieurement ; elle est à moitié pleine d'eau à 4° et on chauffe ce liquide en y faisant arriver de la vapeur à 100° fournie par $5^{k},25$ d'eau. On demande quel sera le volume et la température du bain ainsi chauffé.

On négligera la température du vase et on prendra pour coefficient de dilatation de l'eau $\frac{1}{2,200}$?

Le volume de l'eau sera :

$$3,1416 \times (0^{m},65)^{2} \times \frac{0,75}{2} = 497^{lit},747.$$

1°. Soit x la température finale, la vapeur en se condensant abandonne 540 unités de chaleur exprimée par $5,25 \times 540 + 5,25\,(100 - x)$

Les $497^{lit},747$ en passant de 4° à x° absorberont :

$$497,747\,(x - 4) \text{ calories}$$

Digitized by Google

On a donc l'équation :

$$5,25 \times 540 + 5,25\,(100 - x) = 497,747\,(x - 4)$$

D'où l'on tire :

$$x = 10^{\circ},6$$

2° Le volume d'eau après la condensation serait à 4° :

$$497^{lit},747 + 5^{lit},250 = 502^{lit},997$$

à 0°, le volume est donc :

$$\frac{502,997}{1 + \frac{4}{2200}}$$

Et à 10°,6, il sera :

$$\frac{502,997 \times 1 + \frac{10,6}{2200}}{1 + \frac{4}{2200}} = 504,503$$

Problème 199.

Combien faut-il de vapeur d'eau à la pression 0m,76 et à 100° pour amener à 90°,20 Kilogrammes d'eau à 0° ?

Soit x la quantité de vapeur cherchée, — Lorsqu'elle se condense, elle abandonne $x \times 540$ unités de chaleur et en se refroidissant de 100° à 90° elle perd encore $10\,x$. Sa quantité totale de chaleur cédée sera donc :

$$(540 + 10)\,x.$$

D'un autre côté les 20 Kilogr. d'eau en passant de 0° à 90° absorbent 20×90 unités de chaleur, on aura donc l'équation :

$$(540 + 10)\,x = 20 \times 90$$

$$x = \frac{1800}{550} = 3^{Kilogr},27.$$

Digitized by Google

Chaleurs spécifiques des solides et des liquides.

Problème 200.

La capacité de l'or pour la chaleur est 0,0298, celle de l'eau étant prise pour unité. On demande combien il faudra de ce métal à 45° pour élever de 12°,3 à 15°,7 la température de 1^K,0,00058 d'eau.

L'or doit descendre de 45° à 15°,7, si donc on désigne par x le poids cherché la valeur perdue par l'or sera donnée par la formule :

$$x(45-15,7)\ 0,0298$$

Celle que l'eau absorbera sera exprimée par :

$$1,00058\ (15,7-12,3);$$

et comme le gain est égal à la perte, on aura :

$$x(45-15,7) \times 0,0298 = 1,00058(15,7-12,3)$$

D'où : $x = 3^{Kil},896.$

Problème 201.

Un ballon sphérique de $0^m,14$ de rayon est rempli à la température de 70°. On verse ce mercure dans de l'eau à 4°, qui remplit à moitié un vase cylindrique de $0^m,40$ de hauteur et de $0^m,20$ de rayon. On sait que la densité du mercure est 13,59, son coefficient de dilatation 0,00018024 et sa capacité pour la chaleur 0,033. On demande quelle sera la température du mélange en supposant nulle la température des parois du vase.

Le volume V du ballon sera donné par la

Digitized by Google

formule : $\frac{4}{3}\pi R^3 = 4 \times 1,047 \times 2^{dec.c}, 744 = 11^{d.c.}, 492$. La densité du mercure à 70° sera donnée par la formule :

$$d' = \frac{d}{1 + Kt}$$

d étant la densité à 0° et K le coefficient de dilatation du mercure.

Nous aurons donc :

$$d' = \frac{13,59}{1 + 0,000180241 \times 70} = 13,4107$$

Le poids du mercure à 70° sera donc :

$$11,492 \times 13,4107 = 154^{Kil}, 142$$

D'un autre côté le volume de l'eau sera :

$$\frac{\pi R^2 H}{2} = \frac{3,1416 \times 4 \times 4}{2} = 25^{dec.cub}, 133,$$ puisque l'eau n'occupe que la moitié du cylindre.

L'eau contenue dans ce cylindre pèsera donc :

$$25^{K}, 133.$$

Soit x la température finale, la quantité de chaleur absorbée par l'eau qui était d'abord à 4° sera :

$$25,133(x - 4)$$

D'autre part la quantité de chaleur perdue par le mercure sera :

$$154,142(70 - x)\,0,033$$

$$(25,133 - 154,142 \times 0,033)\,x = 154,142 \times 70 \times 0,033 + 25,133 \times 4$$

En effectuant il vient :

$$(25,133 - 5,086686)\,x = 356,068 + 100,532$$

$$x = \frac{456,600}{20,046} = 22°,8$$

Problème 202.

On a une sphère de platine de $0^m,05$ de

Digitized by Google

rayon à 95°; on la plonge dans 2 litres d'eau à 4°. On demande la température de l'eau lorsque l'équilibre sera établi. La capacité calorifique du platine est 0,0324; son coefficient de dilatation cubique est : 0,00000 8842 et sa densité 22,07.

Soit P le poids de la sphère de platine et x la température finale.

La quantité de chaleur perdue par la sphère sera : $P(95-x)\,0,0324$.

Les 2 litres d'eau en passant de 4° à x° absorberont une quantité de chaleur exprimée par :

$2(x-4)$. On aura donc pour déterminer x l'équation :

$$P(95-x)\,0,0324 = 2(x-4) \qquad (1)$$

Déterminons P.

Soit V' le volume de la sphère à 95° et V son volume à 0°.

On aura :

$$V = \frac{V'}{1+Kt}$$

$$V' = \frac{4}{3}\pi R^3 = 4 \times 1,047 \times 125^{\text{cent. cub}} = 523^{\text{cent. cub}},500$$

On aura donc :

$$V = \frac{523,500}{1+0,00008842 \times 95} = 523^{\text{cent. cub}},060$$

D'après la formule $P = VD$, le poids de la sphère sera :

$$P = 523^{\text{c.c.}},060 \times 22,07 = 11^{\text{Kil}},544\,;$$

En remplaçant P par sa valeur dans l'équation (1) il vient :

$$11,544(95-x)\,0,0324 = 2(x-4)$$

D'où :

$$11,544 \times 95 \times 0,0324 - 11,544 \times 0,0324 \times x = 2x - 8$$

et par suite :

$$x(2 + 11,544 \times 0,0324) = 11,544 \times 95 \times 0,0324 + 8$$

Digitized by Google

D'où enfin : $x = 18^{\circ},3$.

Problème 203.

Un vase de laiton pesant 30 gr. renferme un certain poids inconnu d'eau à la température de 20°; on y plonge 40 gr. de fer à 100° et le mélange s'élève à la température de 20°,716; On demande le poids de l'eau renfermée dans la vase. La chaleur spécifique du fer est 0,1137 et celle du laiton 0,0939.

Soit x le poids inconnu de l'eau, la chaleur qu'il absorbera sera :

$$x\,(20,716 - 20).$$

La quantité totale de chaleur absorbée par l'eau et par le vase sera donc exprimée par :

$$30 \times 0,0939\,(20,716 - 20)$$

La quantité totale de chaleur absorbée par l'eau et par le vase sera donc exprimée par :

$$30 \times 0,0939 \times 0,716 + x \times 0,716$$

D'un autre côté le fer perdra une quantité de chaleur exprimée par :

$$40\,(100 - 20,716)\,0,1137$$

ou :

$$40 \times 0,1137 \times 79,284$$

Pour trouver x on aura donc l'équation suivante :

$$30 \times 0,0939 \times 0,716 + x \times 0,716 = 40 \times 0,1137 \times 79,284$$

D'où l'on tire :

$$x = 500^{gr},79$$

Problème 204.

La chaleur spécifique du laiton est 0,0939; celle du fer est 0,1137; ceci posé : Dans un vase de

Digitized by Google

laiton pesant 30 gr. on met 400 gr. d'eau à 10° et 40 gr. de fer à 100°; On demande quelle sera la température finale du mélange. On admet que le vase est primitivement à la température de 10° et et que finalement il possède la même température que le mélange ?

Appelons x la température finale; le vase qui pèse 30 gr. et l'eau qui pèse 400 gr. devant passer de 10° à x° absorberont une quantité totale de chaleur exprimée par :

$$(400 + 30 \times 0,0939)(x - 10)$$

D'un autre côté le fer en passant de 100° à x° perdra une quantité de chaleur égale à :

$$40 \times 0,1137 (100 - x)$$

pour avoir la température finale du mélange on aura donc l'équation :

$$400 + 30 \times 0,0939)(x - 10) = 40 \times 0,1137 (100 - x)$$

D'où l'on tire, en effectuant les calculs, $x = 11°$

Problème 205.

100 gr. de sulfure de plomb sont mélangés avec 200 gr. de fer dans un vase de laiton pesant 50 gr. On porte le tout à 100° et on le plonge dans 1294 gr. 6 d'eau renfermée dans un vase de laiton du poids de 100 gr. l'eau et le vase qui la renferme sont primitivement à 18°; après le mélange la température finale est de 20°. On demande la capacité calorifique du sulfure de plomb, celle du fer étant 0,114 et celle du laiton 0,094 ?

Soit x la capacité calorifique cherchée;

1° Le sulfure de plomb en passant de 100° à 20° cédera une quantité de chaleur exprimée par

Digitized by Google

$100(100-20)x$

2° La quantité de chaleur perdue par le fer dans le même abaissement de température est $200 \times 0,114(100-20)$

3° Enfin celle abandonnée par le laiton est de :

$$50 \times 0,094(100-20)$$

La quantité de chaleur totale abandonnée par le sulfure de plomb, le fer et le laiton est égale à :

$$100x(100-20) + 200 \times 0,114(100-20) + 50 \times 0,094(100-20)$$

D'un autre côté, les 1294 gr. 6 d'eau renfermée dans le vase de laiton, en passant de 18° à 20° absorberont une quantité de chaleur égale à $1294,6(20-18)$ et le vase de laiton en absorbera $100 \times 0,094(20-18)$

On aura donc l'équation suivante :

$$(100x + 200 \times 0,114 + 50,0,094)(100-20) = (1294,6 + 100 \times 0,094)(20-18)$$

En effectuant on trouve

$$x = \frac{408}{8000} = 0,051$$

Problème 206.

Dans un vase de laiton pesant 50 gr. on met deux morceaux d'un métal inconnu parfaitement égaux entre eux. On chauffe le tout à 100° et on plonge dans un calorimètre de laiton pesant 50 gr. et renfermant 1000 gr. d'eau à la température de 17°,821 ; la température finale du mélange est 20°

On recommence l'expérience à la même température mais en n'employant qu'un seul des deux morceaux de métal au lieu des deux qu'on a pris d'abord ; la température initiale du calorimètre étant

Digitized by Google

toujours 17°, 821; On demande quelle sera la température finale. Le poids de l'eau est toujours 1000 gr. la capacité calorifique du laiton est 0,094.

En appelant p le poids d'un des morceaux métal, x sa capacité calorifique et θ la température cherchée, on aura pour la première expérience le raisonnement suivant :

1° Les 50 gr. de laiton en passant de 100° à 20° perdront une quantité de chaleur exprimée par $50 \times 0,094 (100 - 20)$

Le poids des deux morceaux de métal étant représentés par 2p, la quantité de chaleur perdue est $2px (100 - 20)$

D'un autre côté, les 50 gr. poids du calorimètre de laiton, en passant de 17°, 821 à 20° absorbent une quantité de chaleur exprimée par :

$$50 \times 0,094 (20 - 17,821)$$

Les 1000 gr. d'eau gagneront :

$$1000 \times (20 - 17,821) \text{ calories}$$

On aura donc pour la première expérience :

$$(1) \quad 50 \times 0,094 (100 - 20) + 2px (100 - 20) = 50 \times 0,094 (20 - 17,821) + 1000 (20 - 17,821)$$

2°. Dans une seconde expérience les 50 gr. passant de 100° à θ° perdent une quantité de chaleur égale à $50 \times 0,094 (100 - \theta)$

Un des morceaux de métal en abandonne une quantité exprimée par $px (100 - \theta)$

Les 50 gr. de laiton en passant de 17° 821 à θ° gagnent :

$$50 \times 0,094 (\theta - 17,821)$$

Les 1000 gr. d'eau gagnent :

$$1000 (\theta - 17,821)$$

On a donc dans cette seconde expérience l'égalité :

Digitized by Google

$$50 \times 0,094 (100 - \theta) + px(100 - \theta) = 50 \times 0,094 (\theta - 17,821) + 1000 (\theta - 17,821)$$

En remplaçant dans cette équation px par sa valeur tirée de l'équation (1) et effectuant les calculs, on trouve :

$$\theta = \frac{19,494,2}{1020,43} = 19°,1039$$

Problème 207.

Dans 25 Kil,45 d'eau à 12°,5 on met 6 K,17 d'un corps à la température de 80°; le mélange prend une température de 14°,17; on demande la chaleur spécifique de ce corps?

Soit C cette chaleur cherchée; le corps qui pèse 6 Kil,17 en passant de 80° à 14°,17 perdra une quantité de chaleur égale à 6 K,17 (80 − 14,7) C; d'un autre côté les 25 Kil,45 d'eau en passant de 12°,5 à 14°,17 gagneront une quantité de chaleur égale à 25,45 (14,7 − 12,5); on aura donc l'équation :

$$6,17 (80 - 14,7) C = 25,45 (14,7 - 12,5)$$

D'où :

$$C = 0,104$$

Problème 208.

Dans une masse d'eau à 0° on a introduit 100 gr. de glace à la température de − 12°; un poids d'eau de 7 gr, 2 à 0° s'est congelé autour du glaçon immergé, pendant que sa température remontait à 0°. On demande la chaleur spécifique de la glace? (chaleur latente de fusion : 79, 2)

La quantité de chaleur perdue par les 7 gr, 2 d'eau en se congelant est égale à celle gagnée par

Digitized by Google

les 100 gr. de glace en remontant à 0°. On peut donc poser l'équation :

$$100 \times 12 \times x = 79,2 \times 7,2$$

$$x = \frac{79,2 \times 7,2}{1200}$$

D'où :

$$x = 0,4752$$

Problème 209.

Calculer la chaleur spécifique de l'essence de térébenthine, sachant que 200 gr. d'essence à 33°,7 ayant été mélangée avec 470 gr. 3 d'eau à 12°,23, la température du mélange a été de 15°,37. L'essence de térébenthine était renfermée dans un tube de verre pesant 5 gr. 25 et l'eau dans un vase de cuivre pesant 45 gr. 25

Chaleur spécifique du verre 0,177

Chaleur spécifique du cuivre 0,095.

On posera l'égalité

$$200(33,7-15,37)x + 5,25(33,7-15,37)\,0,177 =$$

$$470,3(15,37-12,23) + 45,25 \times 0,095(15,37-12,23)$$

D'où l'on tire :

$$x = \frac{470,3 \times 3,14 + 45,25 \times 3,14 \times 0,095 - 5,25 \times 18,33 \times 0,177}{200 \times 18,33}$$

En effectuant les calculs par logarithmes, on trouve :

$$x = 0,40169$$

Problème 210.

On plonge 5 Kilogrammes d'un métal à 80° dans 6 Kilogrammes d'eau à 15°,5 et le

Digitized by Google

mélange est porté à 26°,4. L'eau est renfermée dans un vase en cuivre pesant 0K,534. La chaleur spécifique du cuivre est 0,09. On demande la chaleur spécifique du métal.

Soit C la chaleur spécifique cherchée.

Les 5 Kilogrammes de métal en passant de 80° à 26°,4 perdent une quantité de chaleur qui est égale à 5(80-26,4) C.

D'un autre coté les 6 Kilogrammes d'eau en passant de 15°,5 à 26°,4 absorbent une quantité de chaleur égale à 6(26,4-15,5).

Le vase de cuivre gagne 0K,534 × 0,09 (26,4-15,5).

On aura donc pour déterminer la capacité calorifique de ce métal :

$$5(80-26,4)C = 6(26,4-15,5) + 0,534 \times 0,09(26,4-15,5)$$

d'où l'on tire :

$$C = 0,245.$$

Problème 211.

Un vase métallique qui renferme 32K,50 d'eau à 14°,5 pèse 350gr. La chaleur spécifique du métal est 0,12, celle de l'eau étant 1; on met dans l'eau de ce vase 8Kil,25 d'un autre métal à 60°,5, la température de l'eau s'élève à 15°,4. On demande la chaleur spécifique du dernier métal?

L'eau et le vase en passant de 14°,5 à 15°,4 absorbent une quantité de chaleur égale à :

$$(32^K,50 + 0^K,35 \times 0,12)(15,4-14,5)$$

D'un autre côté soit x la chaleur spécifique du second métal. Lorsque les 8K,25 passent de 60°,5 à 15°,4, ils abandonnent une quantité de chaleur exprimée par : $8,25x(60,5-15,4)$

Digitized by Google

On peut donc établir l'équation :

$$(32,50+0,35\times 0,12)(15,4-14,5)=3,25x(60,5-15,4)$$

D'où l'on tire :

$$x=0,0787$$

Problème 212.

La chaleur spécifique du sulfure de cuivre est égale à 0,1212 ; celle du sulfure d'argent à 0,0746 ceci posé, on constate qu'un mélange de ces deux corps pesant 5 K. porté à 40° et plongé dans 6 Kil d'eau à 7°,66g en élève la température à 10° ; On demande combien le mélange contient de sulfure de cuivre et combien de sulfure d'argent ? On ne tient pas compte de l'influence perturbatrice du vase dans lequel le mélange s'effectue.

Appelons x la quantité de sulfure de cuivre et y celle du sulfure d'argent.

La quantité de chaleur perdue par le sulfure de cuivre est : $x\times 0,1212\,(40-10)$

Celle perdue par le sulfure d'argent est :

$$y\times 0,0746\,(40-10)$$

D'un autre côté la chaleur acquise par l'eau est exprimée par :

$$6\,(10-7,66g)$$

En établissant l'égalité et en remplaçant x par sa valeur $5-y$ nous aurons :

$$(5-y)\,0,1212\times 30+y\times 0,0746\times 30=6\times 2,331.$$

D'où l'on tire en effectuant :

$$y=3^{Kil}\quad \text{et}\quad x=2^{Kil}.$$

Problème 213.

Un morceau de fer pesant 870 gr. et recouvert

Digitized by Google

d'une couche de glace à 0°; on plonge le tout dans 1 litre d'eau à 20°. La température finale est de 6°; On demande quel était le poids de la glace attachée au fer? La chaleur spécifique du fer est 0,1138; la chaleur latente de fusion de la glace est 79,25.

La quantité de chaleur acquise par le fer est:

$$0,870 \times 0,1138 \times 6$$

la chaleur absorbée par la glace pour fondre est:

$$x \times 79,25$$

et celle absorbée par l'eau résultant de cette fusion pour passer de 0° à 6° est:

$$x \times 6$$

D'un autre coté, la chaleur perdue par le litre d'eau en se refroidissant est:

$$1(20-6) = 14.$$

Nous aurons donc:

$$0,870 \times 0,1138 \times 6 + 85,25x = 14$$

Et

$$x = \frac{14 - 0,870 \times 0,1138 \times 6}{85,25} = 157^{gr},25$$

Problème 214.

150 gr. de platine à une température inconnue sont plongés dans 470 gr, 4 d'eau à 10; ils en élèvent la température à 20°. Puis 250 gr. du même platine à la même température sont plongés dans 388 gr. d'eau et en élèvent la température de 10° à 30°. Déterminer la chaleur spécifique et la température du platine employé dans ces deux expériences?

Soit x la température inconnue et C la chaleur spécifique du platine, dans la 1re expérience la perte de chaleur éprouvée par le platine sera:

$$150 \times C(x-20)$$

Digitized by Google

elle égalera le gain de chaleur fait par l'eau, lequel est :

$$470,4 \times 10.$$

nous aurons donc l'équation :

$$(1) \qquad 150 \times C(x-20) = 4704$$

La seconde expérience nous donnera :

$$(2) \qquad 250 \times C(x-30) = 388 \times 20 = 7760$$

En divisant ces deux équations membre à membre, on aura :

$$\frac{150(x-20)}{250(x-30)} = \frac{4704}{7760}$$

d'où l'on tire :

$$x = 1000^\circ$$

et, en remplaçant x par cette valeur dans l'équation (1) on trouve :

$$C = 0,032$$

Digitized by Google

Mélange des gaz et des vapeurs — Tensions de la vapeur d'eau. Hygrométrie.

Problème 215.

Une certaine quantité d'air sec pèse 5gr,2 à la température de 0° et sous la pression 0m,76, on la chauffe à 30 sous la pression 0m,77 en lui permettant de se saturer de vapeur d'eau et on demande quel sera le volume qu'elle occupera alors; la tension maximum de la vapeur d'eau à 30° est 0m,0315 On prendra 1gr,3 pour poids du litre d'air sec à la température de 0° et sous la pression 0m,76?

Supposons la pression constante et cherchons à 30° le volume de la quantité d'air donnée. Le volume à 0° sera évidemment exprimé par $\frac{5,2}{1,3} = 4$ litres. La formule $V' = V(1+\alpha t)$ donne pour le volume à 30°, 0,00366 étant le coefficient de dilatation de l'air:

$$V' = 4(1+0,00366 \times 30).$$

Pour avoir V' à la pression 0m,77 il suffira, d'après la loi de Mariotte, de multiplier V' par $\frac{0m,76}{0m,77}$, rapport inverse des pressions et l'on aura:

$$V'' = 4(1+0,00366 \times 30)\ \frac{0,76}{0,77}.$$

Mais d'après la deuxième loi de Dalton 0m,0315 représentant la force élastique de la vapeur à 30°, et 0m,77 celle du mélange il s'ensuit que 0m,77 — 0m,0315 représentera seulement la pression de l'air et les volumes étant en raison inverse des pressions, en multipliant V'' par $\frac{77}{77-3,15}$ on aura pour expression du volume cherché x:

$$x =$$

Digitized by Google

$$x = \frac{4\,(1+0,00366\times 30)\times 76}{77-3,15}$$

$$= \frac{4\times 1,1098\times 76}{73,85} = 4^{lit},54$$

Problème 216.

Le poids du litre d'air sec à 0° et sous la pression 0,76 est 1gr,293. La densité de la vapeur d'eau prise par rapport à l'air est $\frac{5}{8}$. Ceci posé, On demande quel volume occupe à 30° et sous la pression 0m,74 un poids d'air égal à 10gr. lorsque l'état hygrométrique de cet air est $\frac{3}{4}$? La tension maxima de la vapeur d'eau à 30° est 0m,0315. Le coefficient de dilatation des gaz est 0,00366.

Le poids P du volume V, à la pression H et à la température t°, quand l'état hygrométrique est $\frac{1}{F}$, F étant la force élastique maxima de la vapeur d'eau à t°, est donné par la formule:

$$P = \frac{V\times 1,293\,(H-\frac{3}{8}f)}{0,76\,(1+at)}$$

d'où l'on tire le volume:

$$V = \frac{P\times 0,76\,(1+at)}{1,293\,(H-\frac{1}{3}f)}$$

En remplaçant les lettres par leurs valeurs, on trouve:

$$V = 8^{lit},9258.$$

Problème 217.

Calculer le volume d'air qui, à l'état hygrométrique 0,70 contient 600 gr. de vapeur à 30°; la tension maximum de l'air à 30° est:

Digitized by Google

$31,^{mil.m}548$ et la densité de la vapeur d'eau par rapport à celle de l'air est $\frac{5}{8}$.

Soit x le volume cherché, volume qui est le même pour l'air et pour la vapeur.

Le poids d'un litre de vapeur à 30° et à l'état hygrométrique 0,70 est :

$$\frac{1,293 \times 31,548 \times 0,7 \times 5}{(1+0,00367 \times 30)\ 760 \times 8}$$

Or, autant de fois le poids de 600 gr. contient le poids de 1 litre autant le volume demandé contiendra de litres. On a donc :

$$x = 600 : \frac{1,293 \times 31,548 \times 0,7 \times 5}{(1+0,00367 \times 30)\ 760 \times 8}$$

D'où l'on tire, en effectuant les calculs :

$$x = V = 28364 \text{ litres.}$$

Problème 218.

On a 3 litres d'air à 30° et à la pression $0^m,76$ dont l'état hygrométrique est $\frac{3}{4}$. On demande ce que deviendra ce volume d'air à la même température et à la même pression, si on l'agite avec de l'acide sulfurique concentré qui absorbe la vapeur d'eau, et quel sera l'augmentation de poids de l'acide sulfurique ? La tension maximum de la vapeur d'eau à 30° est $0^m,0315$ et sa densité par rapport à l'air est $\frac{5}{8}$.

La tension maximum étant à 30° de $31^{mil.m},5$ à l'état hygrométrique $\frac{3}{4}$ elle sera $31,5 \times \frac{3}{4} = 23^{m.m},6$ Les trois litres d'air humide sont donc à la pression :

Digitized by Google

$$760^{mm} - 23^{mm},6 = 736^{mm},4$$

Il s'agit donc de chercher ce que deviennent ces 3 litres en passant de la pression $736^{mm},4$ à la pression 760^{mm} ; on a alors pour le volume cherché :

$$\frac{3 \times 736,4}{760} = 2^{lit},906$$

Quant au poids des 3 litres de vapeur à 30° et à la pression $23^{mm},6$ il est exprimé par :

$$\frac{3 \times 1,293 \times 23,6 \times 5}{(1+0,00367 \times 30)\,760 \times 8} = 0^{gr},067$$

qui représente l'accroissement de poids éprouvé par l'acide sulfurique.

Problème 219.

Étant donnés $6^{lit},85$ d'air saturé de vapeur d'eau à 11° et sous la pression de $0^{m},768$; on demande quel sera le volume de cet air desséché, à la température de 15° et à la pression $0^{m},750$? On sait qu'à 11° la tension de la vapeur d'eau à l'état de saturation est : $0^{m},010074$.

La pression primitive du gaz est :

$$768^{mm} - 10^{mm},074 = 757^{mm},926$$

Donc son volume à la pression 750 et à 11° est :

$$\frac{6^{lit},85 \times 757,926}{750}$$

à 750^{mm} et à 0°, il sera :

$$\frac{6^{lit},85 \times 757,926}{(1+0,00367 \times 11)\,750}$$

Enfin à $750^{mm},11$ et à 15° ce volume deviendra :

Digitized by Google

$$\frac{6,85(1+0,00367\times15)\,757,926}{(1+0,00367\times11)\,750} = 7^{\text{lit}},02$$

Problème 220.

Dans un vase vide d'une capacité de $2^{\text{lit}},02$ on a introduit d'abord un litre d'air sec sous la pression de $0^{\text{m}},76$ puis de l'eau en quantité suffisante telle qu'il en reste définitivement $20^{\text{cent. cub.}}$ à l'état liquide. On demande la pression intérieure en supposant que la température soit de 30° au moment de l'expérience et que la tension maximum de la vapeur d'eau à cette température soit $0^{\text{m}},031$?

La capacité du ballon étant réduite des $20^{\text{c. cub.}}$ d'eau qui restent à l'état liquide n'est en réalité que de $2^{\text{lit}},02 - 0^{\text{lit}},02 = 2^{\text{lit}}$.

Le volume d'air se trouve donc doublé et par conséquent sa tension qui était de $0^{\text{m}},76$ se trouve réduite de moitié d'après la loi de Mariotte et devient $0^{\text{m}},38$.

Ajoutant à cette pression celle de la vapeur d'eau qui est $0^{\text{m}},031$ on a pour pression totale :

$$0^{\text{m}},411.$$

Problème 221.

On demande à 0° et sous la pression $0^{\text{m}},76$ le poids d'un volume d'air sec, sachant que ce volume saturé, à 18° et à la pression $0^{\text{m}},78$ pèse $16^{\text{gr}},25$? La force élastique de la vapeur d'eau à 18° est $0^{\text{m}},01535$ et sa densité égale au $\frac{5}{8}$ de celle de l'air.

Digitized by Google

Pour avoir le volume d'air qui, à l'état de saturation à 18° et à la pression 780$^{m.m}$ pèse 16^{gr}, 25, cherchons le poids d'un litre d'air saturé dans les mêmes conditions de température et de pression. Ce poids qui se compose du poids d'un litre d'air sec plus du poids d'un litre de vapeur est :

$$\frac{1^{gr},293\,(780-15,35)}{(1+0,0036\times 18)\,760}+\frac{1^{gr},293\times 15,35\times 6,}{(1+0,0036\times 18)\,760\times 8}$$

Réduisant au même dénominateur et simplifiant, on trouve pour poids d'eau litre d'air saturé à 18° et 780$^{m.m}$:

$$\frac{1,293\,(780\times 8-15,35\times 3}{(1+0,00367\times 18)\,760\times 8}$$

Divisant le poids donné 16^{gr}, 25 par le poids d'un litre, on aura le volume cherché :

$$\frac{16^{gr},25\,(1+0,00367\times 18)\;760\times 8}{1,293\,(780\times 8-15,35\times 3}$$

Or c'est ce volume dont on demande le poids à 0° et à 0^{m}, 76, quand il ne contient que de l'air sec. On aura donc le poids demandé en multipliant ce volume par 1^{gr}, 293 poids d'un litre d'air sec à 0° et à 0^{m}, 76. Cette multiplication s'effectue en supprimant ce facteur 1, 293 dans le dénominateur.

On aura donc :

$$P=\frac{16,25\,(1+0,00367\times 18)\;760\times 8}{780\times 8-15,35\times 3}=17,^{gr}$$

Problème 222.

Un ballon dont la capacité est de 12 litres à 0° renferme à 20° de l'hydrogène humide dont l'état hygrométrique est $\frac{3}{4}$; la pression étant 0^{m}, 77, on demande de calculer le poids du gaz et celui de la vapeur qu'il contient ? La

Digitized by Google

densité de la vapeur d'eau est les $\frac{5}{8}$ de celle de l'air, dans les mêmes conditions de pression et de température. La densité de l'hydrogène, celle de l'air étant prise pour unité est 0,0688. Le coefficient de dilatation du verre est $\frac{1}{38700}$, celui du gaz est 0,00367. Le poids d'un litre d'air sec à la température de 0° et à la pression $0^m,76$ est $1^{gr},293$. La tension maximum de la vapeur d'eau à 20° est $17^{m.m},5$

Cherchons d'abord la capacité du ballon; elle sera à 20°;

$$12\left(1+\frac{20}{38700}\right)=12^{lit},0062$$

Le poids de $12^{lit},0062$ d'hydrogène à la pression de $0,77-\frac{3}{4}+0,0175=0^m,756875$ et à la température de 20° elle sera:

$$P=12,0062\times 0,0688\times 1,293\times\frac{1}{1+20\times 0,00367}\times\frac{756,875}{760}$$

D'où:

$$P=0^{gr},9909$$

Le poids du même volume de vapeur dans les mêmes conditions de température sera:

$$P'=12,0062\times\frac{5}{8}\times 1,293\times\frac{1}{1+20\times 0,00367}\times\frac{13,125}{760}$$

D'où:

$$P'=0^{gr},1561$$

Problème 223.

La force élastique maxima de la vapeur d'eau à 100° est $0^m,76$; la densité de cette vapeur est les $\frac{5}{8}$ de celle de l'air dans les mêmes conditions de température et de pression; le litre

Digitized by Google

d'air à 0° et sous la pression $0^m,76$ pèse $1^{gr},293$; le coefficient de dilatation des gaz est 0,00367; ceci posé, on demande combien de litres de vapeur d'eau à 100°, sous la pression $0^m,76$, on peut produire avec $3^{Kil},285$ d'eau ?

Le poids de 1 litre de vapeur d'eau à 100° et sous la pression $0^m,76$ est :

$$\frac{5}{8} \times \frac{1,293}{1+100\times 0,00367}$$

Autant de fois que $3^k,285$ contiendront ce poids, autant on pourra produire de litres de vapeur soit :

$$\frac{3,285\times 8\times 1,367}{5\times 1,293} = 5556^{lit},807.$$

Problème 224.

100 mètres cubes d'air saturé d'humidité à 30° sont refroidis à 10° et restent saturés ; on demande ce que devient leur volume. La pression qu'ils supportent est dans les deux cas $0^m,76$; On demande en outre quel poids d'eau ils laisseront déposer en se refroidissant ? Ainsi la tension maximum de la vapeur d'eau à 10° est $9^{mm},5$; à 30° elle est $31^{mm},5$. La densité de la vapeur est les $\frac{5}{8}$ de celle de l'air dans les mêmes conditions. L'air sec à 0° et à la pression $0^m,76$ pèse $1^{gr},293$ par litre. Le coefficient de dilatation des gaz est 0,00367

$100^{m.cub}$, on trouve 100.000 litres d'air humide à 30° et sous la pression $0^m,76$, la tension maximum étant $0^m,0315$ contiennent :

Digitized by Google

$$100,000 \times \frac{1,293}{1+30\times 0,00367} \times \left(1 - \frac{0,0315}{0,76}\right)$$ grammes d'air sec et :

$$100,000 \times \frac{5}{8} \times \frac{1,293}{1+30\times 0,00367} \times \frac{0,0315}{0,76}$$ grammes de vapeur d'eau.

x litres d'air humide à 10° et sous la pression $0^m,76$, la tension maximum étant 0,0095, contiendront :

$$x \times \frac{1,293}{1+10\times 0,00367} \times \left(1 - \frac{0,0095}{0,76}\right)$$ grammes d'air sec et :

$$x \times \frac{5}{8} \times \frac{1,293}{1+10\times 0,00367} \times \frac{0,0095}{0,76}$$ grammes de vapeur d'eau.

Les poids d'air sec restant les mêmes, on a :

$$x \times \frac{1,293}{1+10\times 0,00367} \times \left(1 - \frac{0,0095}{0,76}\right) = 100,000 \times \frac{1,293}{1+30\times 0,00367} \cdot \left(1 - \frac{0,0315}{0,76}\right)$$

d'où x, volume cherché est égal à

$$\frac{100.000\,(0,76-0,0315)\,(1+10\times 0,00367)}{(1+30\times 0,00367)\,(0,76-0,0095)} = 90^{m.cub.},650$$

La quantité d'eau déposée est égale à

$$\frac{5}{8} \times \frac{1,293}{0,76}\left(\frac{100.000\times 0,0315}{1+30\times 0,00367} - \frac{90\,650\times 0,0935}{1+10\times 0,00367}\right)$$

En effectuant le calcul on trouve pour le poids de la vapeur condensée :

$2^{Kil},133$ gr.

Digitized by Google

Problème 225.

La tension maximum de la vapeur d'eau à 20° est $0^m,0174$, la densité de cette vapeur est les $\frac{5}{8}$ de celle de l'air dans les mêmes conditions, le litre d'air à 0° sous la pression $0^m,76$ est $1^{gr},293$. On demande quel est le poids de vapeur d'eau que contient à 20° un espace cubique de 1200^m de coté, complètement saturé à cette température? Le coefficient de dilatation des gaz est 0,00367.

Le poids de 1 mètre cube d'air sec à 0° et à $0^m,76$ est $1^{Kil},293$. Le poids de 1 mètre cube d'air sec à 20° et à $0^m,76$ est:

$$\frac{1^K,293}{1+0,00367\times 20}\times\frac{5}{8}\times\frac{0,0174}{0,76}$$

Le poids de la vapeur d'eau contenu à 20° dans cet espace cubique de 1200^m de côté est donc:

$$1200^3\times\frac{1,293}{1+0,00367\times 20}\times\frac{5}{8}\times\frac{0,0174}{0,76}$$

En effectuant le calcul on trouve:

$$P = 29784913^{Kil},653^{gr}.$$

Problème 226.

12 litres d'air à 10° sous la pression $0^m,76$ sont en contact avec de l'eau. On chauffe le tout à 50° sous la même pression. Quel sera le volume occupé par le mélange d'air et de vapeur?

La tension maximum de la vapeur d'eau à 10° est $9^m,16$; à 50°, elle est $92^{m.m.}$

12 litres d'air passant de la température de 10° à 50° se dilatent, et on obtient le volume occupé par l'air, en multipliant 12 par $(1+50\times 0,00366)$ et en divisant par $(1+10\times 0,00366)$

Digitized by Google

Nous aurons donc :

$$\frac{12(1+50\times 0,00366)}{1+10\times 0,00366} = \frac{12\times 1,1830}{1,0366}$$

L'air à 10° était sous la pression $760^{m.m} - 9,16$ à 50° il est sous la pression $760^{m.m} - 92^{m.m}$ et comme, d'après la loi de Mariotte, les volumes sont en raison inverse des pressions, on a :

$$\frac{12\times 1,1830\times 750,84}{1,0366\times 668} = 15^{lit},393$$

Problème 227.

A la température de 30° et à la pression $0^{m}.780$, de l'air saturé d'humidité occupe un volume de $10^{m.cub}$; on demande ce que deviendra le volume saturé d'humidité à 0° et $0^{m},760$ de pression. On sait qu'à 30° la force élastique maximum de la vapeur d'eau est de $31^{m.m}548$ et qu'elle est à 0° de $4^{m.m},600$ Coefficient de dilatation des $\frac{1}{267}$. On ne tiendra pas compte de la vapeur d'eau condensée ?

En tenant compte du changement de température, il nous suffit, pour trouver le volume d'air à 0° de diviser $10^{m.cub}$ par $1+\frac{30}{267}$

Ce qui nous donne :

$$\frac{10\times 267}{297}$$

On tiendra compte de la pression en observant qu'à 30° elle était pour l'air :

$$760^{m.m} - 4^{m.m},600 = 755,400$$

La correction de volume, due à ces différentes pressions nous donnera, pour le volume cherché

$$\frac{10\times 267\times 748,452}{297\times 755,4} = 8^{m.cub},907$$

Digitized by Google

Problème 228.

On introduit un peu d'eau dans une chambre d'un baromètre placé dans l'air à la température de 20°; la dépression qu'on observe est de $17^{mm},9$. Quelle est la tension maximum de la vapeur d'eau à 20°? Le coefficient de dilatation du mercure est $\frac{1}{5550}$.

La tension de la vapeur d'eau est égale à la pression d'une colonne de mercure qui à la température de 20° a une hauteur de $17^{mm},9$. Mais il faut l'exprimer au moyen de la hauteur x qu'aurait cette colonne de mercure à 0°.

Si nous appelons d et d' les densités du mercure à 0° et à 20°, la colonne x et la colonne $17^{m},^{m}9$ devant exercer la même pression on aura :

$$(1) \qquad x\,d = 17^{mm},9 \times d'$$

Mais on a d'après la formule :

$$d = d'(1+Kt)$$

$$d = d'\left(1+\frac{20}{5550}\right) = d'\,\frac{557}{555}$$

En remplaçant d par cette dernière valeur dans la formule (1), il vient :

$$x \times \frac{557}{555} \times d' = 17^{mm},9 \times d'$$

d'où l'on tire la valeur de x :

$$x = \frac{17,9 \times 555}{557} = 17^{m},^{m}81$$

Problème 229.

Calculer le poids d'un mètre cube d'air

Digitized by Google

et de vapeur d'eau prise dans les circonstances suivantes :

Pression supportée par le mélange $0^m,770$

Température ——— $50°$

Etat hygrométrique ——— $\frac{6}{10}$

Tension maximum de la vapeur d'eau à $50° = 0^m,092$

Coefficient de dilatation des gaz 0,00367

On sait que le poids d'un litre d'air sec à la température de 0° et sous la pression $0^m,760$ est $1^{gr},293$. Le poids spécifique de la vapeur d'eau rapporté à l'air est : $\frac{5}{8}$?

Désignons par H la pression supportée par le mélange, par f la tension de la vapeur d'eau dans le mélange, par t° la température et par α le coefficient de dilatation des gaz.

Le poids se compose :

1° Du poids de 1000 litres d'air sec à la pression H-f et à la température t°

2° Du poids de 1000 litres de vapeur d'eau à la pression f et à la température t°.

Cherchons d'abord le poids d'un litre de mélange.

Le poids d'un litre d'air sec est égal à :

$$1^{gr},293 \times \frac{1}{1+\alpha t} \times \frac{H-f}{0,760}$$

Le poids d'un litre de vapeur d'eau a pour expression :

$$1^{gr},293 \times \frac{5}{8} \times \frac{1}{1+\alpha t} \times \frac{f}{0,760}$$

La somme de ces deux poids, c'est-à-dire le poids d'un litre du mélange est donc exprimé par :

$$1^{gr},293 \frac{1}{1+\alpha t} \times \frac{H-\frac{5}{8}f}{0,760}$$

Digitized by Google

Ce résultat multiplié par 1000 donne le poids demandé.

En remplaçant les lettres par leurs valeurs, nous aurons donc :

$$1293 \times \frac{1}{1+50 \times 0,00367} \times \frac{0,770 - \frac{3}{8} \times 0,092 \times \frac{6}{10}}{0,760}$$

En effectuant les calculs, on trouve que le poids du mètre cube du mélange dans les conditions énoncées est 1088 gr.

Digitized by Google

Digitized by Google

Problèmes sur l'Acoustique

Problème 230.

Un observateur placé en face d'une montagne entend au bout de 5 secondes l'écho d'un bruit qui se fait à côté de lui. On demande quelle est la distance qui sépare l'observateur de la montagne ?

La vitesse moyenne du son dans l'air étant 337^m par seconde, l'espace parcouru par le son pour aller de l'observateur à la montagne et revenir sera : $5'' \times 337^m = 1685^m$. Cet espace parcouru représente le double de la distance demandée. Cette dernière sera donc :

$$\frac{1685}{2} = 842^m,5$$

Problème 231

Une corde en laiton tendue par un poids de 2^{kilog} et une corde en cuivre tendue par un poids de 25 ^{kilog}, rendent le même nombre de vibrations. Leur diamètre est le même. On demande quel est le rapport des longueurs de ces deux cordes, sachant que la densité du laiton est 8,39 et celle de l'argent 10,47 ?

Le nombre des vibrations étant en raison inverse des racines carrées des densités, proportionnel aux racines carrées des poids tenseurs et en raison inverse des longueurs, on a la formule :

$$\frac{L}{L'} = \frac{\sqrt{d'}}{\sqrt{d}} \times \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P'}}$$

Soient donc A et L les longueurs des cordes en

Digitized by Google

argent et en laiton, nous aurons :

$$\frac{A}{L} = \frac{\sqrt{8,39}}{\sqrt{10,47}} \times \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{2}}$$

Le calcul nous donne :

$$\frac{A}{L} = 3,16492.$$

Problème 232.

Une corde en laiton et une corde en argent rendent le même nombre de vibrations ; la 1re a 1m de long et est tendue par un poids de 2 Kil. La 2ème a une longueur de 3m.165. On demande à quel poids équivaut la force qui la tend, sachant que la densité du laiton est 8,39 et celle de l'argent 10,47 ?

La formule $\frac{l}{l'} = \frac{\sqrt{d'}}{\sqrt{d}} \times \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p'}}$ nous donne :

$$\sqrt{p} = \frac{l}{l'} \cdot \sqrt{p'} \cdot \frac{\sqrt{d}}{\sqrt{d'}}$$

en élevant au carré :

$$p = \frac{l^2}{l'^2} \cdot p' \cdot \frac{d}{d'}$$

$$p = \overline{3,165}^2 \times 2 \times \frac{10,47}{8,39} = 25^{\text{Kil}},001.$$

Problème 233

Deux cordes de même nature et de même longueur ont des diamètres respectivement égaux à 0m,0015 et 0m,0038 et sont tendues par des poids égaux à 400 gr. et 1600 gr. Quel est le rapport des nombres de vibrations exécutées par ces deux cordes ?

Digitized by Google

Toutes choses égales d'ailleurs, le nombre de vibrations est en raison inverse des diamètres et en raison directe des racines carrées des poids tenseurs.

On a donc :

$$\frac{1}{x} = \frac{0,0038}{0,0015} \times \frac{\sqrt{400}}{\sqrt{1600}}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{0,0038}{0,0015} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1,26666}.$$

Problème 234.

Une corde en laiton ayant 1m de long est tendue par un poids de 2 Kilog; une autre corde en argent ayant 3m,165 de long est tendue par un poids de 25 Kilog. Ces deux cordes rendent le même nombre de vibrations dans le même temps; leur diamètre étant le même. La densité du laiton est 8,39; on demande quelle est la densité de l'argent ?

On a la formule générale où n et n' représentent le nombre des vibrations :

$$\frac{n}{n'} = \frac{l'}{l} \times \frac{\sqrt{d'}}{\sqrt{d}} \times \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p'}}$$

$\frac{n}{n'}$ étant égal, dans le cas actuel, à l'unité, on a :

$$\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{d'}} = \frac{l'}{l} \times \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p'}}$$

$$\sqrt{d} = \sqrt{d'} \times \frac{l'}{l} \times \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p'}}$$

En élevant au carré :

$$d = d' \times \frac{l'^2}{l^2} \times \frac{p}{p'}$$

Remplaçant les lettres par leurs valeurs, il vient :

Digitized by Google

$$d = 8,39 \times \frac{1}{10,017225} \times \frac{25}{2}$$

d'où, en effectuant :

$$d = 10,469.$$

Problème 235.

Une corde tendue par un poids de 13 Kil. rend un certain son. Quelle devrait être la force de tension pour que cette corde rendît la tierce majeure ?

On sait que la tierce majeure est représentée par $\frac{5}{4}$, quand le son fondamental l'est par 1.

D'après la formule :

$$n = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{p}{\pi d}}$$

les nombres de vibrations d'une même corde sont directement proportionnels à la racine carrée du poids qui la tendent.

En représentant donc par x le poids demandé, on a :

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{13}} = \frac{5}{4}$$

en élevant au carré :

$$\frac{x}{13} = \frac{25}{16} \text{ et } x = \frac{13 \times 25}{16} = 20^{\text{Kilogr.}},812.$$

Problème 236

Une corde tendue par un poids de 4 Kilogr. rend un son de 200 vibrations par seconde. On demande :

1° Les nombres de vibrations que rendront les $\frac{4}{5}$, les $\frac{2}{3}$ et la $\frac{1}{2}$ de la corde ;

2° Le nombre de vibrations de la corde entière. —

Digitized by Google

tendue successivement par 9 Kil., 16 Kil., 25 Kil.,

3° — Le nombre de vibrations de deux cordes de même longueur, également tendues, mais dont les poids spécifiques seraient pour l'une 4 fois et pour l'autre 25 fois plus considérable ?

1° — Les nombres de vibrations d'une corde sont, toutes circonstances égales d'ailleurs, inversement proportionnels à la longueur de ces cordes. On a donc :

$$\frac{4}{5}x = \frac{2}{3}y = \frac{1}{2}z = 200 \times 1$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{5}{4} \times 200 = 250$$
$$y = \frac{3}{2} \times 200 = 300$$
$$z = \frac{2}{1} \times 200 = 400$$

2° — Les nombres de vibrations d'une même corde sont directement proportionnels aux racines carrées des poids tenseurs ; on a donc :

$$\frac{x}{\sqrt{9}} = \frac{200}{\sqrt{4}} ; \; x = \frac{200 \times 3}{2} = 300$$

$$\frac{y}{\sqrt{16}} = \frac{200}{\sqrt{4}} ; \; y = \frac{200 \times 4}{2} = 400$$

$$\frac{z}{\sqrt{25}} = \frac{200}{\sqrt{4}} ; \; z = \frac{200 \times 5}{2} = 500$$

3° — Les nombres de vibrations de plusieurs cordes sont, toutes choses égales d'ailleurs, inversement proportionnels aux racines carrées des densités ; on a donc :

$$\frac{x}{200} = \frac{1}{\sqrt{4}} ; \; x = \frac{200}{2} = 100.$$

$$\frac{y}{200} = \frac{1}{\sqrt{25}} ; \; y = \frac{200}{5} = 40$$

Digitized by Google

Digitized by Google

Problèmes sur l'Optique.

Problème 237

Un point lumineux placé au centre d'une sphère creuse, dont le rayon à deux mètres éclaire sa surface interne avec une intensité représentée par 100 : On demande quelle serait cette intensité si le rayon de la sphère avait 5m ?

Les surfaces des sphères étant entre elles comme les carrés de leurs rayons, si le rayon devient 2, 5 fois plus grand, la surface sera 4, 9 fois plus grande ; par conséquent le point lumineux placé au centre éclairera 4, 9 fois moins cette surface. Ce raisonnement, qui démontre géométriquement la loi suivant laquelle décroît l'intensité de la lumière, appliqué à la solution de notre problème, nous donnera en appelant x l'intensité lumineuse cherchée :

$$\frac{x}{100} = \frac{2^2}{5^2} \; ; \; x = \frac{100 \times 4}{25} = 16 \cdot$$

Problème 238.

Soit 40m la distance qui sépare la flamme d'un bec de gaz de celle d'une bougie : On demande en quel point il faudrait placer un corps entre ces deux lumières pour qu'il fût également éclairé par chacune d'elles, en supposant que l'intensité de la lumière de la flamme du gaz soit 16 fois plus grande que celle de la bougie ?

L'intensité de la lumière décroissant en raison directe du carré de la distance, si nous appelons x la distance de la flamme du gaz au point demandé et y celle

Digitized by Google

de la flamme de la bougie à ce même point, nous aurons l'égalité :

$$\frac{16}{x^2} = \frac{1}{y^2} \text{ ou } \frac{x}{4} = \frac{y}{1}.$$

Or comme dans toute proportion la somme des antécédents est la somme des conséquents, comme un antécédent est à son conséquent, on aura :

$$\frac{x+y}{4+1} = \frac{x}{4} = \frac{y}{1}$$

d'où l'on tire :

$$x = \frac{40 \times 4}{5} = 32^{m}.$$

$$y = \frac{40}{5} = 8^{m}.$$

C'est-à-dire qu'il faudra placer le corps à 32m. de la flamme du gaz et à 8m. de celle de la bougie.

Problème 239.

Un miroir plan, mobile autour d'un axe vertical, reçoit un rayon horizontal fixe : si le miroir vient à tourner d'un angle donné A, quel est l'angle dont aura tourné dans le même plan, le rayon réfléchi ?

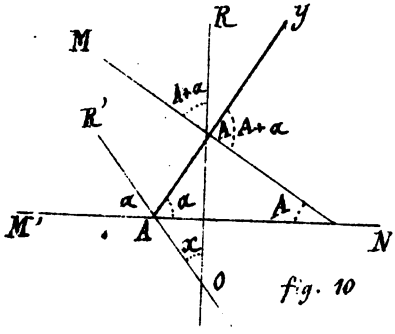


fig. 10

L'angle cherché est 2A. En effet, soit MN (fig. 10) l'intersection du plan du miroir avec le plan horizontal passant par le rayon incident yA ; soit AR le rayon réfléchi et yAN = RAM = α.

Soit M'N la nouvelle position du miroir telle que M'NM = A. On a alors : yA'N = R'A'M'

Digitized by Google

$= A + \alpha$; l'angle cherché est l'angle $ROR' = x$ compris entre les deux rayons réfléchis et on a :

$$x = y\,A'O = A'AO = 2(A + \alpha - 2\alpha = 2A$$

Problème 240

Quel est le plus grand angle de réfraction que puisse faire avec la normale, au point d'incidence, un rayon lumineux passant du vide dans l'eau, sachant que l'indice de réfraction de l'eau est égal à 1,336 ?

D'après la loi de Descartes, en appelant i l'angle d'incidence et R l'angle de réfraction on aura :

$$\text{Max. } \sin V = \sin R = \frac{1}{1,336}$$

d'un autre coté on a :

$$\frac{\sin i}{\sin V} = 1,336$$

d'où :

$$\sin V = \frac{\sin i}{1,336}$$

mais :

$$\sin R = \frac{1}{1,336}$$

On a donc :

$$\log. \sin R = -\log 1,336 = \bar{1},8741985$$

d'où :

$$R = 48°-27'-39''$$

Problème 241

L'image réelle d'une flèche AB (Fig 11) placée devant une lentille convergente LL' se forme en $A'B'$ derrière cette lentille à une distance OP' égale à $0^m,04$. En E', à $0^m,02$ du point O, centre optique de la lentille, on place un miroir m, m' incliné à $45°$ sur OP'. On demande où l'image va se former ?

Digitized by Google

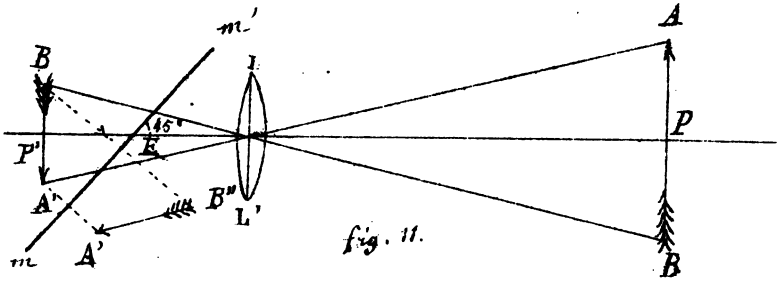


fig. 11.

Les rayons émanés du point A, au lieu de converger en A' sur l'axe secondaire OA, iront après leur réflexion sur le miroir m m' converger au point A'', symétrique du point A' par rapport au miroir.

De même les rayons émanés du point B iront converger au point B' par rapport au miroir m, m'. On aura donc facilement une image A''B'' symétrique de A'B' et qui lui sera égale. Si l'image de A'B' est perpendiculaire à l'axe optique de la lentille, l'image A''B'' sera parallèle à cet axe.

L'image ainsi rejetée de côté pourra facilement être agrandie à l'aide d'une loupe convenablement disposée. C'est le principe du Télescope de Newton.

Problème 242.

On a deux points lumineux I et I', éloignés l'un de l'autre de 0m,42 et situés sur un même point horizontal. Ces deux points sont placés chacun devant un miroir.

Digitized by Google

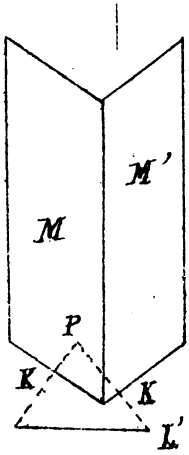


fig. 12

Les deux miroirs M et M' sont inclinés l'un sur l'autre. Les distances respectives des points lumineux à ces miroirs sont respectivement 0m,20 et 0m,30. On demande quelle devra être l'inclinaison de ces miroirs l'un sur l'autre pour que les images des deux points lumineux L et L' se superposent ?

Soit A l'angle que doivent former les miroirs et P le point où doivent se confondre les deux images.

L'angle A peut se représenter par l'angle plan perpendiculaire aux deux miroirs il est évidemment égal à :

$$180 - LPL'$$

Mais on a vous la loi l'angle :

$$\cos . LPL' = \frac{\overline{LP}^2 + \overline{L'P}^2 - \overline{LL'}^2}{2\, LP . L'P}$$

On obtient au moyen de cette équation, en lui faisant subir les transformations nécessaires :

$$\sin . \frac{1}{2}\, LPL' = \sqrt{\frac{(LL' + LP - L'P)(LL' - LP + L'P)}{4, LP . L'P .}}$$

Remplaçant dans cette équation les lettres par leurs valeurs qui sont :

$$LL' = 0^m,42$$

$$LP = 0,20 \times 2 = 0^m,40$$

Digitized by Google

$$BS = 0,30 \times 2 = 0^m,60$$

On aura :

$$\sin \frac{1}{2} LPL' = \sqrt{\frac{22 \times 62.}{9600}}$$

D'où l'on tire :

$$\frac{1}{2} LPL' = 22° - 8' - 33''$$

Comme l'angle A est égal à :

$$180 - LPL',$$

On aura :

$$A = 180° - 2 \times (22° - 8' - 33'')$$

$$A = 135° - 42' - 54''.$$

Fin.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY,
BERKELEY

THIS BOOK IS DUE ON THE LAST DATE
STAMPED BELOW

Books not returned on time are subject to a fine of 50c per volume after the third day overdue, increasing to $1.00 per volume after the sixth day. Books not in demand may be renewed if application is made before expiration of loan period.

DEC 7 1931

8 FEB'63 RA

REC'D LD
FEB 8 1963

27 Oct'65

REC'D LD
OCT 15 '65 -5 PM

75m-7,'30

Digitized by Google

YC 22415

GA43
C5

Chevallier
178629

Digitized by Google

Digitized by Google